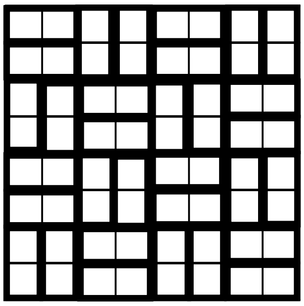
2001./2002. m. g. Sagatavošanas olimpiāde

ĪSI ATRISINĀJUMI.

5.1. Jā; piemēram, 225 + 117 = 342

5.2. Jā. Skat. 4. zīm.

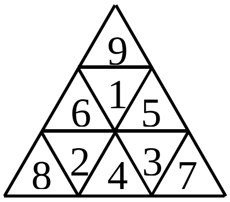


4. zīm.

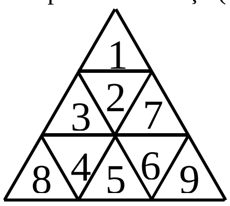
5.3. Viena zēna grāmatu skaits pēc kārtējās grāmatas saņemšanas var būt 4; 9; 15; 22; 30; 39; 49; 60; 72; 85; 99. Vienīgi 15 un 85 summā dod 100. Tātad Jānim ir 6 gadi, bet Andrim - 13 gadi.

5.4. a) jā, var. Skat. 6. zīm.

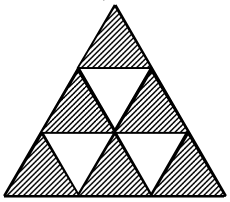
b) var būt tikai viena pāra summa (skat. 7. zīm.) Visas summas nevar būt nepāra, jo tad visos iesvītrotajos trijstūrīšos ierakstīto skaitļu paritātei jābūt vienai un visos neiesvītrotajos - otrai, bet mūsu rīcībā nav sešu vienas paritātes skaitļu (skat. 8. zīm.).



6. zīm.



7. zīm.



8. zīm.

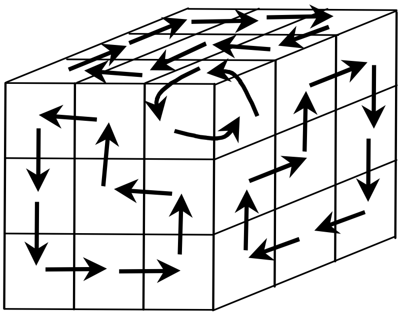
5.5. Iegūstamo gabalu kopgarums ir 600 cm, tātad vienāds ar stieņu kopgarumu. Tāpēc, tos iegūstot, jāizmanto viss stieņu materiāls bez atlikuma. Bet visu gabalu garumi centimetros dalās ar 3, kamēr viena stieņa garums centimetros ar 3 nedalās. Tātad prasītais nav paveicams.

6.1. Nē. Skat., piem., skaitli 109.

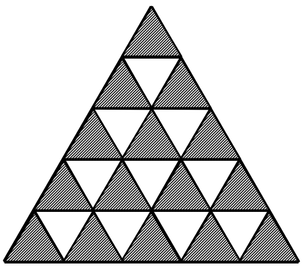
6.2. Bez uzvarām var palikt augstākais viena komanda (ja tādas būtu vismaz divas, kas uzvarēja to savstarpējās spēlēs?). Tā kā tādas komandas <u>ir</u>, tad turnīrā startēja 8 komandas. Tātad tika izspēlētas 7+6+...+2+1=28 spēles.

6.3. Jā; piemēram, 120, 240 un 360. (Piezīme: šie skaitļi ir $5!\cdot 1, 5!\cdot 2, 5!\cdot 3.$)

6.4. Jā. Mikrobu pārceļošana trīs skaldnēs ar kopēju virsotni parādīta 9. zīm. Otrā skaldņu trijniekā tā notiek līdzīgi.



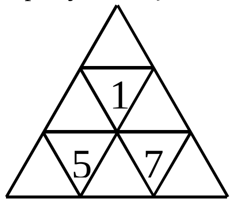
9. zīm.



10. zīm.

6.5. Skat. 10. zīm. Uz katras taisnes baltie un melnie trijstūrīši atrodas pamīšus, tātad melno ir augstākais par 1 vairāk nekā balto. Bet melno trijstūrīšu vispār ir par 5 vairāk nekā balto. Tāpēc vajag vismaz 5 taisnes. Skaidrs ka ar 5 taisnēm pietiek (piemēram, pārsvītrojot "horizontālās" trijstūrīšu joslas).

7.1. Jā. Skat., piem., 11. zīm., kur pārējos skaitļus ieraksta patvaļīgi.



11. zīm.

1	9	6
8	2	5
7	4	3

12. zīm.

7.2. Nē. Ja, piemēram, AD=10 cm, tad jābūt AB+BD≥10 cm un AC+CD≥10 cm. Bet pat četru lielāko atlikušo attālumu summa nepārsniedz 19 cm.

7.3. Jā, var. Skat. 12. zīm.

7.4. Jā, var. Piemēram, der 1; 3; 7; 9.

7.5. Piemērs 10; -18; 10; 10; -18; 10 parāda, ka var uzrakstīt 6 skaitļus. Pieņemsim, ka uzrakstīti 7 skaitļi *a; b; c; d; e; f; g*. No $(a+b+c)+(d+e+f)>0$ un $a+b+c+d+e<0$ seko, ka $f>0$. Līdzīgi $b>0$. Tad $b+(c+d+e)+f>0$ - pretruna.

8.1. Var uzrakstīt 6 skaitļus 12; 3; 45; 6; 78; 90. Viencipara skaitļu nevar būt vairāk par 3, un no atlikušajiem 7 cipariem vispār nevar uzrakstīt vairāk nekā 3 vairākciparu skaitļus. Rakstot viencipara vietā vairākciparu skaitļus, kopējais skaitļu skaits nepalielinās.

8.2. ΔMBC=ΔABN pēc pazīmes mlm; no tā seko vajadzīgais. Jāšķiro gadījumi, kad M un N atrodas vienā vai dažādās pusēs taisnei AC.

8.3. Virkne 619737131179 ir garākā iespējamā.

8.4. Pakāpeniski iegūst $6 \to 3\cdot3=9 \to 4\cdot5=20 \to 100 \to 2500 \to \ldots$, kamēr sasniedz skaitli, kas lielāks par beigās iegūstamo. Tā kā $m= 1+(m-1)$ un $1\cdot(m-1)=m-1$, tad no m var iegūt m-1, ja m>1. Pakāpeniski "nolaižamies" līdz 123456789.

8.5. No dotā seko $x^2+y^2+z^2+t^2+2(xy+xz+xt+yz+yt+zt)=0$. Tāpēc $xy+xz+xt+yz+yt+zt\le 0$. Bet $(2\mathrm{A}+\mathrm{B})+(\mathrm{A}+2\mathrm{B})=3(xy+xz+xt+yz+yt+zt)\le 0$). Tāpēc nevar būt 2A+B>0 un A+2B>0.

9.1. Bezgalīgi daudzos veidos var atrast tādus dažādus nenulles skaitļus *a* un *b*, ka $a+b=-p$. Tad der vienādojumi $x^2+px+ab=0$.

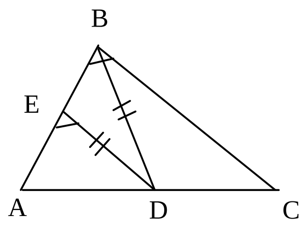
9.2. Ja meklējamā skaitļa pirmie cipari ir *a* un *b*, tad tas ir

$1000a+100b+10(2a)+(2b)=102(10a+b)=102\cdot\overline{ab}=2\cdot3\cdot17\cdot\overline{ab}$.

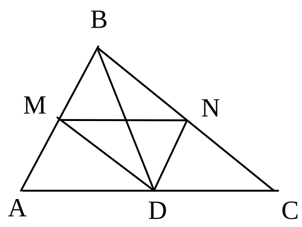
Tā kā $a\le4$ un $b\le4$, tad lielākais iespējamais pirmskaitlis $\overline{ab}$ ir 43.

9.3. Nē. Šķirojam divus gadījumus.

a) mediānai un viduslīnijai ir kopīgi galapunkti (13. zīm.) Tad $\angle$BED=$\angle$EBD ir šauri kā leņķi pie vienādsānu trijstūra pamata, tāpēc $\angle$AED ir plats. Bet $\angle$ABC=$\angle$AED.



13. zīm.



14. zīm.

b) mediāna krusto viduslīniju (14. zīm.) Tad paralelogramam MBND ir vienādas diagonāles, tātad tas ir taisnstūris un $\angle$ABC=90°.

9.4. Uzliekam uz kausiem pa 8 monētām. Ja kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta palikusi malā. Otrajā svēršanā salīdzinām malā palikušās 9 monētas ar jebkurām 9 jau svērtajām.

Ja pirmajā svēršanā viens kauss nosveras uz leju, tad atšķirīgā monēta atradusies uz svariem. Otrajā svēršanā salīdzinām uz viena kausa esošās 8 monētas ar 8 vēl nesvērtajām.

9.5. Var atzīmēt 18 rūtiņas: 9 gar apakšējo malu un 9 gar kreiso malu, neatzīmējot rūtiņu kreisajā apakšējā stūrī.

Pierādīsim, ka vairāk rūtiņu atzīmēt nevar. Pieņemsim, ka n rūtiņas ir vienīgās atzīmētās savā kolonnā. Ja n=10, tad citu rūtiņu vispār nav. Ja n<10, tad n≤9. Līdzīgi spiež par rūtiņām, kuras ir vienīgās atzīmētās savā rindiņā, un ievēro, ka 9+9=18.

10.1. Nē. Visu ciparu summa ir 45. Ja A·B dalās ar 3, bet ne ar 9, tad viens no skaitļiem A un B dalās ar 3, bet otrs nē. Tāpēc vienam no A un B ciparu summa dalās ar 3, bet otram nē - pretruna.

10.2. L(AEC)= L(COE)-L(AOE)= $\frac{2}{3}$ L(OCF) - $\frac{2}{9}$ L(OCF)= $\frac{1}{3}$ L(OCF).

Līdzīgi aprēķina L(DBF).

10.3. Pieņemsim, ka $x = a^2 + b^2 + c^2$ un $a \geq b \geq c > 0$. Tad

$x^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2$

10.4. Trīs pēc kārtas uzrakstīti skaitļi var būt 1; 1; 2 vai 1; 2; 2 (varbūt citā kārtībā). Abos gadījumos to reizinājumu R un summu S saista sakarība R=2S-6. Tāpēc meklējamā summa ir ∑(2S-6)=2∑S-6·20=2·3·(10·1+10·2)-120=60.

10.5. Nē, nevar. Pirmajam gājienam jābūt kaudžu apvienošanai. Pēc tā abās palikušajās kaudzēs akmeņu daudzums dalās ar vienu un to pašu nepāra pirmskaitli (5, 7 vai 3), un šī īpašība saglabājas.

11.1. $2^{2x} + 2^{-2x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = 23.$

11.2. ΔMBC=ΔABN (mlm). Tā kā BC un BN veido 60° leņķi, tad šie trijstūri iegūstami viens no otra ar pagriezienu par 60°. Tad arī atbilstošās malas AN un CM iegūstamas viena no otras ar pagriezienu par 60°.

11.3. Tā kā $f(x)+y=f(f(x+y))=f(f(y+x))=f(y)+x$, tad $f(x)+y=f(y)+x$ un $f(x)-x=f(y)-y$ visiem x un y. Apzīmējam $f(x)-x=c$, c - konstante; tad $f(x)=x+c$. No dotās vienādības seko $(x+y+c)+c=x+c+y$ un c=0; tātad $f(x)=x$. Pārbaude parāda, ka šī atbilde der.

11.4. Apzīmējam $a=b\cdot n$, $n\in$ N, n>1. Tad $\frac{bn+1}{b+1} = \frac{bn+n+1-n}{b+1} = n - \frac{n-1}{b+1}$ ir vesels skaitlis. Tā kā n>1, tad jābūt $n-1 \geq b+1$, $n \geq b+2$, $a \geq b(b+2) > b^2$.

11.5. Nē, nevar. Apzīmējam i-tā šahista iegūto punktu skaitu ar P_i, bet atbilstošās summas i-jam šahistam ar $S_1^{(i)}$ un $S_2^{(i)}$. Viegli pārliecināties, ka $P_1(S_1^{(1)} - S_2^{(1)}) + P_2(S_1^{(2)} - S_2^{(2)}) + ... + P_n(S_1^{(n)} - S_2^{(n)}) = 0$, jo šī izteiksme katrai rezultatīvai partijai starp i-to un j-to šahistu satur vienu locekli $+P_iP_j$ un vienu locekli $-P_iP_j$. Tā kā starp skaitļiem P_i ir pozitīvi un neviens no tiem nav negatīvs, tad visas minētās starpības nevar būt vienlaicīgi pozitīvas.

12.1. Vajadzīgais seko no vienādības $a^3 + b^3 = (a+b)((a+b)^2 - 3ab)$.

12.2. Piemēram, P(x)= $(x-1)^5 + 1$.

12.3. Varam uzskatīt, ka a=cosα un b=cosβ. Tad

$\left| ab + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2} \right| = \left| \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \right| = \left| \cos(\alpha \pm \beta) \right| \leq 1$.

12.4. Sagriežam pārklājamo trijstūri ar viduslīnijām 4 mazos regulāros trijstūros. Tiem apvilktās riņķa līnijas vienādas ar sākotnējos trijstūros ievilktajām riņķa līnijām. Pārbīdes izdara tā, lai atbilstošās riņķa līnijas sakristu.

12.5. Pavisam ir 10 summas ar 1; 2; 3; ...; 9 saskaitāmajiem un 1 summa ar 10 saskaitāmajiem. Šī pēdējā ir pozitīva. Pārējās var apvienot pa pāriem, piemēram: $a+b+c$ apvieno pārī ar $d+e+f+g+h+i+j$ (katras kopas summa apvienojas pārī ar papildkopas summu). Tā kā abas viena pāra summas ir veseli skaitļi un to summa ir 1, tad tieši viena no tām ir pozitīva.

Tātad pavisam ir $\frac{90}{2} + 1 = 46$ pozitīvas summas.