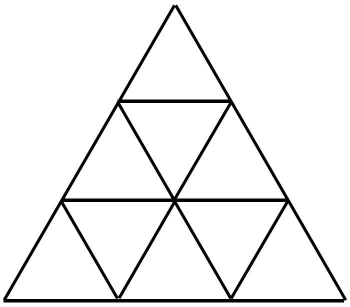
5. klase

1. Vai eksistē tādi dažādi trīsciparu naturāli skaitļi A un B, ka trim skaitļiem A, B un A+B ciparu summas visas savā starpā vienādas?

2. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Vai to var sadalīt no divām blakus rūtiņām sastāvošos "ķieģelīšos" tā, lai katrs taisnstūris, kas sastāv no 5 rūtiņām, vismaz vienu ķieģelīti saturētu pilnībā?

3. Gan Jānim, gan Andrim, sākot ar 4 gadu sasniegšanu, katrā dzimšanas dienā uzdāvināja tik grāmatas, cik gadu zēnam šajā dienā palika. Patlaban viņiem kopā šādā ceļā uzdāvinātas 100 grāmatas. Cik gadu ir katram zēnam, ja Andris ir vecāks?

4. Katrā no mazajiem trijstūrīšiem (skat. 1. zīm.) ierakstīts viencipara naturāls skaitlis; dažādos trijstūrīšos ierakstīti dažādi skaitļi. Aplūkojam visas tādas divu skaitļu summas, kuri ierakstīti trijstūrīšos ar kopīgu malu.
   a) vai var būt, ka neviena no šīm summām nepārsniedz 10?
   b) kāds mazākais daudzums no šīm summām var būt pāra skaitļi?



1. zīm.

5. Doti 6 stieņi, katrs 1 m garš. Vai tos var sagriezt gabalos tā, lai rastos 13 gabali ar garumu 27 cm katrs, 8 gabali ar garumu 15 cm katrs un 43 gabali ar garumu 3 cm katrs?

6. klase

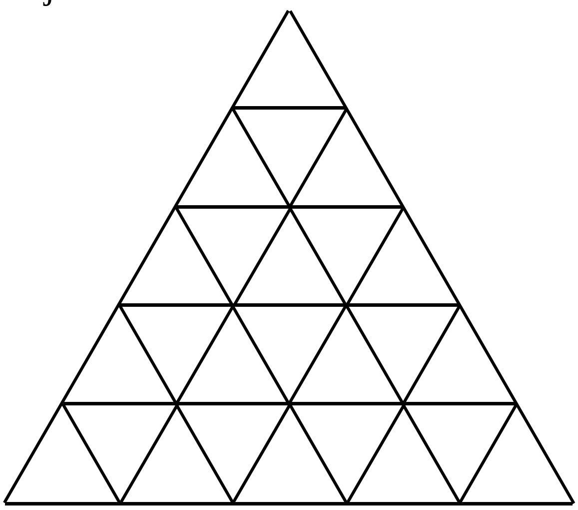
1. Vai katru nepāra naturālu skaitli, kas lielāks par 1, var izteikt kā divu tādu saskaitāmo summu, no kuriem vienam visi cipari ir pāra, bet otram visi cipari ir nepāra?

2. Volejbola turnīrā katra komanda ar katru citu spēlēja tieši vienu reizi. Volejbolā neizšķirtu nav. Turnīru nobeidzot, izrādījās, ka astotdaļai visu komandu nav nevienas uzvaras. Cik spēļu izspēlēja turnīrā?

3. Vai eksistē trīs dažādi naturāli skaitļi ar īpašību: katru divu skaitļu reizinājums dalās ar to summu?

4. Kuba katra skaldne sadalīta 3×3 vienādos kvadrātiņos. Katrā kvadrātiņā dzīvoja viens mikrobs. Katrs mikrobs pārcēlās uz citu kvadrātiņu, kuram ar viņa agrāko apmešanās kvadrātiņu ir kopīga mala. Vai var gadīties, ka katrā kvadrātiņā atkal dzīvo pa mikrobam?

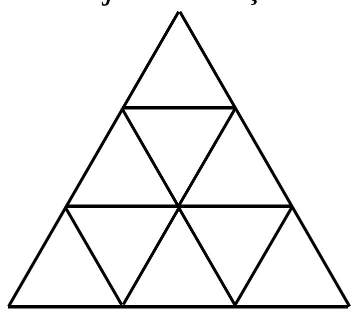
5. Ar kādu mazāko taišņu skaitu var krustot visus 2. zīm. redzamos 25 trijstūrīšus? Taisnes nedrīkst iet ne caur vienu trijstūrīšu virsotni.



2. zīm.

7. klase

1. Vai 3. zīm. redzamajos trijstūrīšos var ierakstīt 9 dažādus viencipara naturālus skaitļus, lai katros divos trijstūrīšos ar kopīgu malu ierakstītajiem skaitļiem vienīgais kopīgais pozitīvais dalītājs būtu 1?



3. zīm.

2. Vai var plaknē atzīmēt 4 punktus tā, lai trīs attālumi starp tiem būtu 5 cm, 6 cm un 10 cm, bet pārējie neviens nepārsniegtu 4 cm?

3. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Rūtiņās ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā cits skaitlis). Katrai rindiņai un katrai kolonnai aplūkojam tajā ierakstīto skaitļu reizinājumu. Vai var būt, ka neviens reizinājums nepārsniedz 90?

4. Vai var izvēlēties četrus dažādus naturālus skaitļus tā, ka katru triju izvēlēto skaitļu summa ir pirmskaitlis?

5. Kādu lielāko daudzumu skaitļu var izrakstīt rindā tā, lai katru trīs pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa būtu pozitīva, bet katru piecu pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa būtu negatīva?

8. klase

1. Kādu lielāko daudzumu naturālu skaitļu, kas dalās ar 3, var uzrakstīt, lietojot katru ciparu tieši vienu reizi?

2. Punkti A, B un C atrodas uz vienas taisnes; B atrodas starp A un C. Trijstūri AMB un BNC ir vienādmalu. Pierādiet, ka AN=CM.

3. Izveidojiet iespējami garu nenulles ciparu virkni tā, lai katri divi blakus uzrakstīti cipari veidotu pirmskaitli un visi šie pirmskaitļi būtu dažādi. (Vienas virknes piemērs, kam piemīt šī īpašība, ir 6131). Nav jāpierāda, ka Jūsu izveidotā virkne ir garākā iespējamā.

4. Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 6. Ja uz tāfeles uzrakstīts skaitlis n un $n=a+b$ (a un b - naturāli skaitļi), tad ar vienu gājienu atļauts n nodzēst un tā vietā uzrakstīt reizinājumu $a \cdot b$. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai uz tāfeles būtu uzrakstīts skaitlis 123456789?

5. Dots, ka $x+y+z+t=0$. Apzīmējam $A=xy+yz+zt$ un $B=xz+xt+yt$. Pierādiet: vai nu $2A+B \leq 0$, vai arī $A+2B \leq 0$.

9. klase

1. Pierādiet: katram veselam skaitlim p var atrast bezgalīgi daudzus tādus veselus skaitļus q, ka vienādojumam $x^2+px+q=0$ ir divas dažādas veselas saknes.

2. Ar kādu lielāko pirmskaitli var dalīties četrciparu naturāls skaitlis, kura trešais cipars 2 reizes lielāks par pirmo, bet ceturtais cipars 2 reizes lielāks par otro?

3. Vai šaurleņķu trijstūrī mediāna var būt vienāda ar viduslīniju?

4. Dotas 25 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Zināms, ka 24 monētu masas ir vienādas savā starpā, bet vienas monētas masa ir citāda. Kā ar divām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka nekā pārējās?

5. Kvadrāts sastāv no 10×10 rūtiņām. Dažas rūtiņas atzīmētas. Katra atzīmētā rūtiņa ir vienīgā atzīmētā vai nu savā rindā, vai savā kolonnā. Kāds lielākais rūtiņu skaits var būt atzīmēts?

10. klase

1. Naturāli skaitļi A un B kopā satur visus 9 nenulles ciparus, katru tieši vienu reizi. Vai var gadīties, ka reizinājums A·B dalās ar 3, bet nedalās ar 9?

2. Uz leņķa MON malām OM un ON atlikti attiecīgi nogriežņi OA=AB=BC un OD=DE=EF. Pierādīt, ka trijstūru AEC un DBF laukumi ir vienādi savā starpā.

3. Dots, ka skaitlis x ir triju veselu nenulles skaitļu kvadrātu summa. Pierādīt, ka arī x^2 ir triju veselu nenulles skaitļu kvadrātu summa.

4. Pa apli izrakstīti 10 vieninieki un 10 divnieki. Nekādi 3 pēc kārtas izrakstīti skaitļi nav vienādi. Aprēķināti visi triju pēc kārtas uzrakstīto skaitļu reizinājumi (to pavisam ir 20). Atrast šo 20 reizinājumu summu.

5. Trīs kaudzēs ir attiecīgi 51, 49 un 5 akmeņi. Ar vienu gājienu var apvienot divas kaudzes vienā vai arī sadalīt divās vienādās kaudzēs tādu kaudzi, kurā ir pāra skaits akmeņu. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var iegūt 105 kaudzes pa vienam akmenim katrā?

11. klase

1. Dots, ka $2^x+2^{-x}=5$. Aprēķināt $2^{2x}+2^{-2x}$.

2. Punkti A, B, C atrodas uz vienas taisnes; B atrodas starp A un C. Trijstūri AMB un BNC ir vienādmalu, pie tam M un N atrodas vienā pusē no taisnes AC. Pierādīt, ka taisnes AN un CM savā starpā veido 60° lielu leņķi.

3. Kādas funkcijas $f(t)$ ir definētas visiem reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un visiem reāliem x un y apmierina vienādību $f(f(x+y))=f(x)+y$?

4. Dots, ka a un b - naturāli skaitļi, $a>b$, a dalās ar b un $a+1$ dalās ar $b+1$. Pierādīt, ka $a>b^2$.

5. Turnīrā piedalās n šahisti ($n\geq 2$), katrs ar katru citu spēlē vienu reizi. Par uzvaru spēlētājs iegūst 1 punktu, par neizšķirtu 1/2 punkta, par zaudējumu 0 punktus. Pēc turnīra beigām katrs spēlētājs aprēķināja divus skaitļus: A_1 - visu to spēlētāju punktu summu, kam viņš zaudējis, un A_2 - visu to spēlētāju punktu summu, kurus viņš uzvarējis. Vai var gadīties, ka katram spēlētājam pastāv nevienādība $A_1>A_2$?

12 klase

1. Dots, ka a, b un c ir naturāli skaitļi un gan $a+b$, gan $a \cdot b$ dalās ar c. Pierādīt, ka a^3+b^3 dalās ar c^2.

2. Atrodiet kaut vienu tādu piektās pakāpes polinomu P, ka vienādība P(x) +P(2-x)=2 ir identitāte.

3. Dots, ka a un b ir reāli skaitļi, $|a| \leq 1$ un $|b| \leq 1$. Pierādīt, ka $\left|ab + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\right| \leq 1$.

4. Plaknē atrodas 5 vienādi regulāri trijstūri. Pierādīt, ka jebkurus četrus no tiem var nepagriežot pārbīdīt tā, ka pēc pārbīdīšanas tie pilnībā pārklās piekto trijstūri. (Paskaidrojums: pārbīdīšanas laikā trijstūru malas paliek paralēlas savam sākotnējam stāvoklim).

5. Pa apli izrakstīti 10 veseli skaitļi, kuru summa ir 1. Apskatām visas pulksteņa rādītāju kustības virzienā pēc kārtas izrakstītu skaitļu summas pa vienam, pa diviem, …, pa desmit skaitļiem (3 skaitļu a, b, c gadījumā būtu 7 šādas summas: a, b, c, $a+b$, $b+c$, $c+a$, $a+b+c$). Cik no tām ir pozitīvas?