5. klase

1. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Vai to var sagriezt 5 daļās tā, lai no tām varētu salikt divus kvadrātus? Griezumi var iet tikai pa rūtiņu līnijām; ne vairāk kā 1 daļa drīkst būt taisnstūris; saliekot daļas nedrīkst pārklāties.

2. Pa apli jāuzraksta naturāli skaitļi no 1 līdz 8 ieskaitot, katrs vienu reizi. Vai to var izdarīt tā, lai katri divi blakus uzrakstīti skaitļi atšķirtos viens no otra vismaz par

a) 3, **b)** 4 ?

3. Aija, Maija, Paija un Kaija kopā apēda 40 konfektes (katra – vismaz vienu). Aija un Maija kopā apēda 25 konfektes, Paija apēda vairāk konfekšu nekā jebkura cita meitene. Cik konfekšu apēda Kaija?

4. Pierādīt: uzrakstot vienu otram galā divus naturālus divciparu skaitļus, iegūst lielāku skaitli nekā šos pašus divciparu skaitļus sareizinot.

5. Vai var rindā uzrakstīt visus viencipara naturālos skaitļus, katru vienu reizi, lai pie $n = 1; 2; 3; ...; 8$ vienlaicīgi izpildītos sekojošais: pirmo n uzrakstīto skaitļu summa dalās ar $(n+1)$-o skaitli, pie kura pieskaitīts 1?

2003./2004.m.g. sagatavošanas olimpiāde matemātikā

6. klase

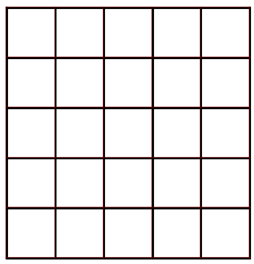
1. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts kāds skaitlis. Katrai rindiņai un katrai kolonnai aprēķināja tajā ierakstīto skaitļu summu. Vai var gadīties, ka trīs no šīm summām vienādas ar 10, bet trīs - ar 9 ?

2. Andris uzrakstīja rindā citu aiz cita 6 skaitļus. Pirmos divus viņš izvēlējās patvaļīgi, bet katru nākošo, sākot ar trešo, ieguva kā divu pēdējo šai brīdī uzrakstīto skaitļu summu. Pēc tam Andris paziņoja Jurim visu 6 skaitļu summu. Vai Juris var noskaidrot vismaz vienu uzrakstīto skaitli?

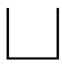
3. Četri trīsciparu skaitļi izveidoti no vieniem un tiem pašiem cipariem. Zināms, ka kaut kādu divu skaitļu summa nedalās ar 3. Pierādīt, ka arī visu 4 skaitļu summa nedalās ar 3.

4. Pierādīt, ka eksistē tāds četrciparu skaitlis, kas dod atlikumu 3, dalot ar vismaz 20 dažādiem divciparu skaitļiem.

5. Vai 1.zīm. attēloto režģi var salikt no tādām figūrām, kāda parādīta 2. zīm.? Saliekot daļas var būt pagrieztas arī citādi, bet nekādām 2 daļām nedrīkst būt vairāk par 2 kopējiem punktiem.



1.zīm

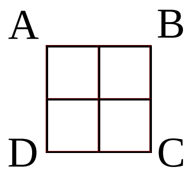


2.zīm

7. klase

1. Vai **a)** 10, **b)** 11 pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu summa var būt 0?

2. Kvadrātiskā režģī, kas sastāv no 2×2 rūtiņām (skat. 3.zīm.), jāatzīmē trīs rūtiņu virsotnes tā, lai vismaz viena no tām būtu A, B, C vai D. Cik daudzas no trim atzīmētajiem punktiem sastāvošas figūras var iegūt, ja nekādas divas no tām nav savā starpā vienādas?



3.zīm

3. Doti 100 zelta gabali, kuru masas ir 1g, 2g, 3g, 4g, ..., 100g .Ņurga jau paņēmis sev 25 no šiem gabaliem. Vai viņš noteikti var paņemt vēl 25 zelta gabalus tā, lai visu 50 paņemto zelta gabalu kopējā masa būtu vienāda ar 50 nepaņemto zelta gabalu kopējo masu?

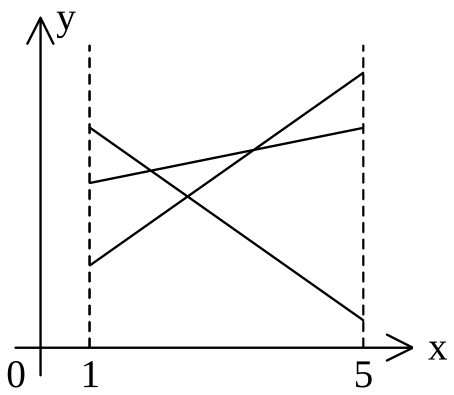
4. Vai eksistē 10 dažādi naturāli skaitļi ar īpašību: lai kā tos sadalītu divās daļās, vienas daļas visu skaitļu summa dalās ar otras daļas visu skaitļu summu?

5. Karnevāla zālē karājas 6 lampas. Dažas no tām savienotas ar lentām (katra lenta savieno 2 lampas un nepieskaras citām). Pavisam ir vismaz 7 lentas. No katrām trim lampām vismaz divas savienotas ar lentu; katras 2 lampas savieno augstākais viena lenta.

Pierādīt: ir tādas trīs lampas, kas visas savienotas ar lentām cita ar citu.

8. klase

1. Cik dažādu funkciju grafiki, kas ir taisnes nogriežņi vai lauztas līnijas, redzami 4.zīm. ? (Apskatām funkcijas, kas definētas pie $1 \le x \le 5$).



4.zīm.

2. Plaknē uzzīmētas 10 taisnes. Nekādas divas no tām nav paralēlas un nekādas trīs neiet caur vienu punktu.

Vai noteikti uz taisnēm var izvēlēties virzienus tā, lai izpildītos īpašība: sākot kustību no jebkura punkta uz jebkuras taisnes un kustoties tikai pa taisnēm izvēlētajos virzienos, nav iespējams atgriezties izejas punktā?

3. Šaurleņķu trijstūrī ABC augstums no virsotnes A, leņķa B bisektrise un malas AB vidusperpendikuls krustojas vienā punktā. Aprēķināt $\angle ABC$.

4. Kādā klasē ir 25 skolēni. Sauksim skolēnu par noslēgtu, ja viņam klasē nav vairāk par 20 draugiem. Pierādīt: klasē ir vai nu divi noslēgti skolēni, kas savā starpā nedraudzējas, vai arī divi draugi, neviens no kuriem nav noslēgts, vai arī abu minēto veidu skolēnu pāri (uzskatām: ja A draudzējas ar B, tad arī B draudzējas ar A).

5. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi a, b, c, d, ka no 15 skaitļiem: a; b; c; d; $a+b$; $a+c$; $a+d$; $b+c$; $b+d$; $c+d$; $a+b+c$; $a+b+d$; $a+c+d$; $b+c+d$; $a+b+c+d$ tieši astoņi (ne vairāk un ne mazāk) dalās ar 2003 ?

9. klase

1. Vai $\sqrt{3+\sqrt{8}}+\sqrt{7-\sqrt{40}}$ lielāks, mazāks vai vienāds ar $\sqrt{6+\sqrt{20}}$?

2. Apaļa ezera krastā atrodas 4 pilsētas A, B, C, D (tieši šajā secībā). Pirmdien vienlaicīgi no A uz B un no D uz C devās laivas. Katra laiva brauca pa taisnu maršrutu ar konstantu ātrumu, un tās nonāca galā vienlaicīgi (laivu ātrumi varbūt nebija vienādi savā starpā). Otrdien šīs pašas laivas vienlaicīgi devās no B uz D un no C uz A ar tiem pašiem ātrumiem, atkal kustoties pa taisniem maršrutiem. Pierādīt, ka tās ezerā satikās.

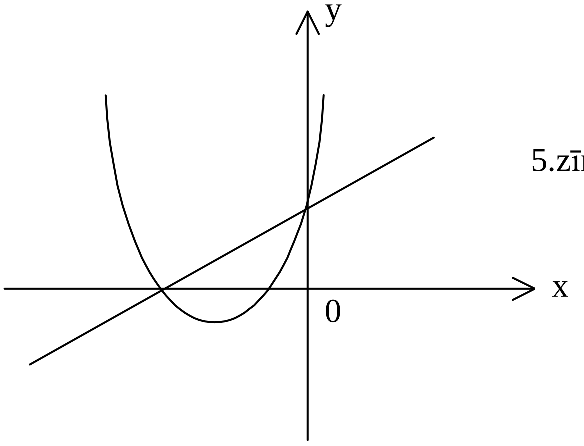
3. Uz tāfeles uzrakstīti 2003 vieninieki. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties divus uz tāfeles uzrakstītus skaitļus (apzīmēsim tos ar a un b), nodzēst tos un vietā uzrakstīt vienu skaitli $\sqrt{2ab}$. Atkārtojam tādus gājienus, līdz uz tāfeles paliek viens skaitlis. Pierādīt, ka tas ir mazāks par 45.

4. Izliektā 4-stūrī ABCD pastāv vienādība $\angle BAD=\angle CDA$. Malu AB un CD vidusperpendikuli krustojas uz malas AD. Pierādīt, ka AC=BD .

5. Rindā uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 100 ieskaitot, katrs tieši vienu reizi. Katriem trim pēc kārtas uzrakstītiem skaitļiem aprēķinām to summu. Kāds lielākais daudzums šo summu var būt nepāra skaitļi?

10. klase

1. Vai 5.zīm var būt attēloti funkciju $y=x^2+px+q$ un $y=qx+1$ grafiki?



5.zīm.

2. Dots, ka p un q – reāli skaitļi un vienādojumam $x^4+px+q=0$ ir reāla sakne c. Pierādīt, ka $p^2 \geq 4c^2 q$.

3. Atrodiet mazāko pozitīvo veselo skaitli x ar īpašību: x^2-1 dalās gan ar 501, gan ar 1001, bet nedalās ar 2003.

4. Uz trijstūra ABC malas AB ņemts tāds punkts M, ka AB=3AM. Ir zināms, ka CM=CB. Trijstūrī MCB ievilktās riņķa līnijas centrs ir O, un tā pieskaras CM punktā K. Pierādīt, ka AK||MO .

5. Kvadrāts sastāv no 10×10 rūtiņām. Desmit rūtiņas nokrāsotas melnas tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā nokrāsota tieši viena rūtiņa. Vai var gadīties, ka nenokrāsoto kvadrāta daļu var sagriezt 45 taisnstūros, katrs no kuriem sastāv no 2 rūtiņām?

11. klase

1. Definējam $F_1=1$, $F_2=1$, $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$ pie $n \geq 1$. Pierādīt, ka katram naturālam n pastāv vienādība $\frac{1}{F_1 F_3}+\frac{1}{F_2 F_4}+\ldots+\frac{1}{F_n F_{n+2}}=1-\frac{1}{F_{n+1} F_{n+2}}$.

2. Riņķī ar rādiusu R ievilkts regulārs 14-stūris $A_1A_2...A_{14}$. Pierādīt, ka $A_1A_2+A_1A_6=A_1A_4+R$.

3. Naturālam skaitlim n ir tādi divi dažādi naturāli dalītāji a un b, ka $(a+2)(b-1)=n-2$. Pierādīt, ka skaitlis $2n$ ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts.

4. Aļģirds un Benedikts katrs uzrakstīja vairākus naturālu skaitļus. Katrs no viņiem izmantoja katru nenulles ciparu tieši vienu reizi un neizmantoja ciparu 0. Pierādīt: var atrast tādus divus ciparus x un y, ka Aļģirds tos iekļāvis vienāda garuma skaitļos un arī Benedikts tos iekļāvis vienāda garuma skaitļos.

5. Funkcija $f(x,y)$ definēta veseliem pozitīviem x un y, un tās vērtības ir veseli pozitīvi skaitļi. Neviens vesels pozitīvs skaitlis nav $f(x,y)$ vērtība vairāk nekā 2003 dažādiem pāriem (x,y). Pierādīt: eksistē tādi veseli pozitīvi skaitļi m un n, ka $f(m,n)>m\cdot n$.

12. klase

1. Zināms, ka a, b, c – tādi skaitļi, ka $ax^2+2bx+c<0$ visiem x. Pierādīt, ka $a^2x^2+2b^2x+c^2>0$ visiem x.

2. Trijstūrī ABC novilktas bisektrises AM un CN. Pierādīt: ja punkts X atrodas uz nogriežņa MN, tad X attālumu summa līdz taisnēm AB un BC vienāda ar X attālumu līdz taisnei AC .

3. Trijstūrī ABC visas malas dažāda garuma un $\angle B=60°$. Uz stariem AB un CB attiecīgi atlikti tādi punkti X un Y, ka AX=CY=AC. Pierādīt, ka taisne XY iet caur ΔABC ievilktās riņķa līnijas centru.

4. Kādiem naturāliem n skaitlis $2n^3-8n^2-6n+2003$ ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts?

5. Turnīrā piedalās 6 komandas; katrai ar katru citu jāspēlē divas reizes. Katra komanda dienā spēlē augstākais vienu reizi. Kāds ir mazākais dienu skaits, kurā var noorganizēt turnīru, ja spēļu saraksti nekādām divām dienām nedrīkst pilnībā sakrist?