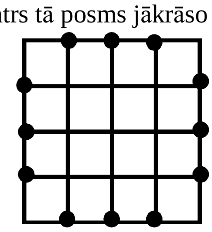
ĪSI ATRISINĀJUMI/ ATBILDES

5.1. Ciparu virknēs no 000 līdz 999 pāra un nepāra ciparu ir vienāds daudzums („simetrijas pēc"). Tā kā 000 vispār nav jāapskata un nulles skaitļa priekšā netiek rakstītas, tad starp „īstajiem" cipariem nepāra ciparu ir vairāk nekā par 100 vairāk nekā pāra ciparu. Šo faktu negroza arī skaitlis 1000, kurā pāra ciparu ir par 2 vairāk nekā nepāra ciparu.

5.2. Sākotnējam skaitlim x pieskaitīja 321, tātad 3x=321 un x=107 . Pārbaude (obligāta!) 107x4=428 parāda, ka šī atbilde der.

5.3. Vārdā KRIZANTĒMA ir pavisam 10 burti, no tiem 9 dažādi. Apzīmēsim skaitlī iztrūkstošo ciparu ar X. Tad **K+R+I+Z+A+N+T+Ē+M+X = 0+1+...+9=45**.
Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem A ir pāra cipars un **K+R+I+Z+A+N+T+Ē+M+A dalās ar 9**. No abiem izceltajiem faktiem seko, ka X-A dalās ar 9. Tā kā X-A≠0, tad |X-A|≥9, un |X-A|=9 iespējams tikai tad, ja X un A ir 0 un 9. Tā kā A - pāra cipars, tad A=0.

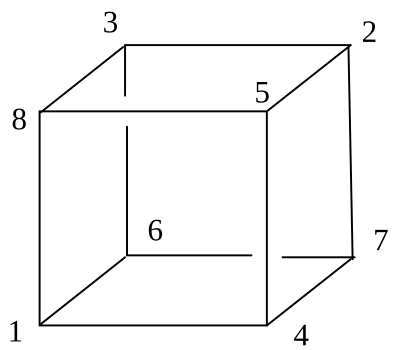
5.4. Režģa līniju kopgarums ir 40, tāpēc katrs tā posms jākrāso tieši vienu reizi.



7. zīm**.**

Apskatām 7.zīm. izceltos punktus; to ir 12, un no katra no tiem iziet 3 krāsojami nogriežņi. Rūtiņas kontūrs, kas satur izcelto punktu, vai kāsītis, kura viduspunkts ir šajā punktā, satur divus no tiem; tāpēc katrā izceltajā punktā jābeidzas vienam kāsītim. Tikai 4 no kāsīšiem (stūros) var beigties divos izceltos punktos katrs; tāpēc vajag vismaz 4+(12-4·2)=8 kāsīšus. (Lasītājs var viegli pārbaudīt, ka ar 8 kāsīšiem var iztikt, lai gan uzdevums to neprasa.)

5.5. a) skat. 8.zīm.



8.zīm.

b) apzīmēsim vienas skaldnes skaitļu summu ar S. Tad 6·S=3·(1+2+3+4+5+6+7+8) (katra virsotne pieder 3 skaldnēm), tāpēc S=18.

6.1. Apzīmēsim 2x2 kvadrātu skaitu ar x, bet 3x3 kvadrātu skaitu ar y. Tad 4x+9y=49, x≥0, y≥0, x un y – veseli skaitļi. Pārbaudot x=0; 1; ...; 12 (lielākas x vērtības nav jāpārbauda, jo tad y iznāk negatīvs), redzam, ka varētu derēt tikai x=1; y=5 un x=10; y=1. Pirmajā gadījumā ir ≥2 lielā kvadrāta malas, kas nesatur nevienu 2 x 2 kvadrāta malu - pretruna, jo 7 nedalās ar 3. Otro gadījumu apskata līdzīgi.
Tātad minētā sagriešana nav iespējama.

6.2. Kafijas krūzē ir vairāk.

Cipariņš kopā izmanto vienādus daudzumus kafijas un piena. Pirmajā izdzertajā malkā kafijas ir tikpat, cik piena, bet otrajā – mazāk. Tāpēc pēc otrā malka izdzeršanas atlikušās kafijas ir vairāk nekā atlikušā piena.

6.3. Nē, nevar.

Starp ierakstāmajiem skaitļiem ir arī pirmskaitļi 17; 19; 23; 29; 31. Ar tiem nedalās neviens cits ierakstāmais skaitlis. Tāpēc tiem jāietilpst visos apskatāmajos reizinājumos. Bet ir tikai 4 (centrālās) rūtiņas, kas pieder visiem apskatāmajiem 3x3 rūtiņu kvadrātiem.

6.4. Pirmais apgalvojums ir patiess tikai visīsākā zēna mutē. Tāpēc klasē ir tikai viens patiess zēns, bet visi citi ir meļi, un patiesais zēns X ir visīsākais. Tāpēc citu zēnu tiešām ir ≥11. Ja to būtu ≥12, tad otrā īsākā zēna otrais apgalvojums būtu patiess; tā nevar būt. Tāpēc citu zēnu ir tieši 11, un pavisam klasē ir 12 zēnu. (Pārbaude parāda, ka iegūtā situācija apmierina uzdevuma nosacījumus.)

6.5. Ja puse meiteņu sēž ar zēniem, tad otrā puse meiteņu sēž ar meitenēm; tātad šī „otrā puse" sastāv no pāra skaita meiteņu. Tāpēc meiteņu kopējais skaits dalās ar 4. Ja uzdevumā minētā pārsēdināšana būtu iespējama, tad arī zēnu skaits dalītos ar 4; tad arī kopējais skolēnu skaits dalītos ar 4. Bet 34 ar 4 nedalās - pretruna.

7.1. Ja tāds skaitlis x būtu, tad vienlaicīgi jāpastāv sakarībām $x=\frac{c-b}{a}$, $x=\frac{a-c}{b}$, $x=\frac{b-a}{c}$. Tā kā (c-b)+(a-c)+(b-a)=0 un neviens no skaitļiem c-b; a-c; b-a nav 0, tad kāds no tiem ir negatīvs, bet kāds cits – pozitīvs. Tāpēc arī kāda no iegūtajām izteiksmēm pieņem pozitīvu vērtību, bet kāda cita – negatīvu; tas nav iespējams.

7.2. a) jā; skat., piem., 9.zīm.

5	7	9
3	4	6
1	2	8

9. zīm.

b) nē. Ja tā notiktu, tad visu triju rindiņu summu summai būtu jābūt pāra skaitlim. Bet 1+2+...+9=45 – pretruna.

7.3. Ja Andris būtu izsvītrojis citu ciparu, nevis pēdējo, tad summai būtu jābūt pāra skaitlim. Tātad Andris izsvītrojis pēdējo ciparu. Apzīmēsim sākotnējo skaitli ar $\overline{abcde}$; tātad $\overline{abcde}+\overline{abcd}=38207$. Tā kā $\overline{abcde}=10\cdot\overline{abcd}+e$, iegūstam $11\cdot\overline{abcd}+e=38207$. Tā kā 0≤e≤9, tad e ir atlikums, kuru iegūst, 38207 dalot ar 11; tātad e=4; $\overline{abcd}=(38207-4):11=3473$ un Andra sākotnēji uzrakstītais skaitlis ir 34734.

7.4. Pieņemsim pretējo: ir tāds 5x5 rūtiņu kvadrāts, kurā nav nevienas atzīmētās rūtiņas. Tad visas 9 atzīmētās rūtiņas katra pieder rindai vai kolonnai, kas neiet caur šo kvadrātu; tādu kopā ir 8. Tāpēc divas atzīmētās rūtiņas pieder vai nu vienai rindai, vai vienai kolonnai – pretruna.

7.5. Katrs nogrieznis var krustot augstākais 5 citus un katru no tiem – tikai vienā punktā. Nodzēsīsim tos 3 nogriežņus, kas katrs krusto visus piecus citus; līdz ar to pazudīs arī attiecīgie krustpunkti. Paliks 3 nogriežņi; uz viena no tiem būs palicis 1 krustpunkts, uz otra – neviens. Tāpēc uz trešā palikušā nogriežņa būs palicis 1 krustpunkts. Tātad sākotnēji uz tā bija 1+3=4 krustpunkti.

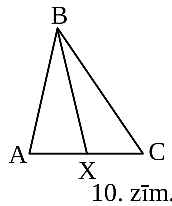
8.1. Taisnstūriem, kam diagonāles ir OA un OB, katram laukums ir 1 saskaņā ar A un B izvēli. Atņemot to kopīgās daļas laukumu, iegūstam vajadzīgo.

8.2. Jā. Piemēram:

0; 4; -1; -3; ±5; ±6; ±7; ...; ±52.

Gan summa, gan reizinājums ir 0.

8.3. Pieņemsim, ka X ir ΔABC malas AC ir viduspunkts (10.zīm.)



10. zīm.

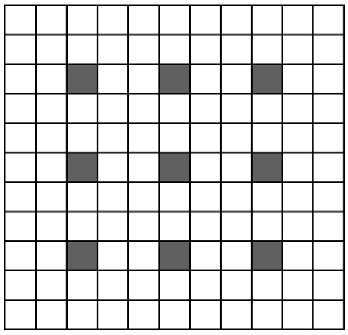
Tā kā ∠AXB+∠CXB=180º, tad vai nu ∠AXB≥90º; vai ∠CXB≥90º; varam pieņemt, ka ∠CXB≥90º. Tāpēc ∠CXB ir lielākais leņķis trijstūrī CXB; tātad BC ir lielākā mala šajā trijstūrī, un BC>BX. Secinām, ka ΔABC **garākā** mala ir garāka par visām ΔABC mediānām; tāpēc ΔABC garākā mala ir garāka par visām ΔMNK malām, un tāpēc šie trijstūri nav vienādi.

8.4. Atbilde: nē, nevar.

Pieņemsim, ka tādi skaitļi eksistē. Tā kā x un y dalās ar 52, tad x un y dalās ar 4; tā kā y un z dalās ar 56, tad y un z dalās ar 4. Tātad x un z abi dalās ar 4. Bet tad nevar būt LKD(x,z)=54, jo 54 nedalās ar 4.

8.5. a) apgalvojums seko no tā, ka 28·9=252 un 252>121·2.

b) ievērosim, ka jebkura figūra satur vienu no 9 iesvītrotām rūtiņām (11.zīm.). Uzdevuma apgalvojums seko no tā, ka 28>9·3.

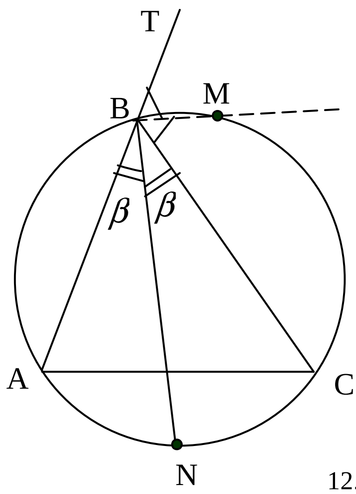


11. zīm.

9.1. Nē. Tā kā visām parabolām zari vērsti „”uz augšu”, tad a>0, b>0, c>0. Bet tad neviena no parabolām nevar krustot ordinātu asi (kur x=0) punktā, kurā y<0.

9.2. Novelkam arī iekšējā leņķa bisektrisi, kas krusto riņķa līniju punktā N. Tā kā $\cup AN = 2\beta = \cup NC$,

tad N ir $\cup AC$ viduspunkts.



12. zīm.

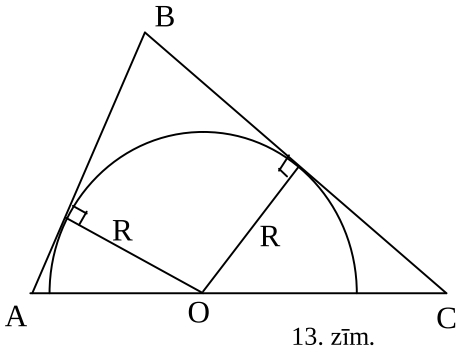
Tā kā $\angle MBN = \angle MBC + \angle CBN = \frac{1}{2}\angle TBC + \frac{1}{2}\angle CBA = \frac{1}{2}(\angle TBC + \angle CBA) = \frac{1}{2}\cdot 180^0 = 90^0$, tad M un N ir diametrāli pretēji punkti. Tātad $\cup NAM = \cup NCM$. Atņemot no šīs vienādības vienādību $\cup AN = \cup NC$, iegūstam $\cup AM = \cup CM$, k.b.j.

9.3. Ja p=2, tad $p^4-1=15$. Ja p>2, tad p – nepāra skaitlis. Ievērojam, ka

$p^4-1=(p^2-1)(p^2+1)=(p-1)(p+1)(p^2-1)$.

Skaitļi p-1 un p+1 ir divi viens otram sekojoši pāra skaitļi, tāpēc viens no tiem dalās ar 2, bet otrs ar 4; p^2+1 ir pāra skaitlis. Tāpēc p^4-1 dalās ar $2\cdot 4\cdot 2 = 16$.

9.4. Ievērosim, ka $L(ABC)=L(ABO)+L(CBO)=\frac{1}{2}AB\cdot R + \frac{1}{2}BC\cdot R = \frac{1}{2}(AB+BC)\cdot R$ un $L(ABC)=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)\cdot r$.

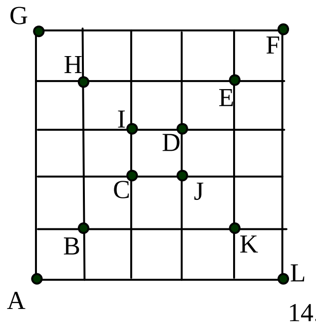


13. zīm.

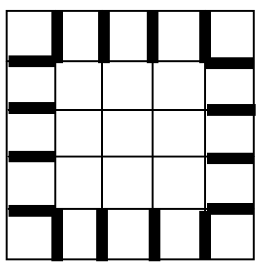
No abu laukuma izteiksmju vienādības seko $\frac{r}{R} = \frac{AB+BC}{AB+BC+CA} > \frac{AB+BC}{(AB+BC)+(AB+BC)} = \frac{1}{2}$, k.b.j.

9.5. Atbilde: Ar 8 gājieniem.

Risinājums. Viegli redzēt, ka prasītais sasniedzams, nokrāsojot kvadrātus, kuru diagonāles ir AE; AD; CF; BF; HL; IL; JG; KG (skat. 14.zīm.).



14. zīm.

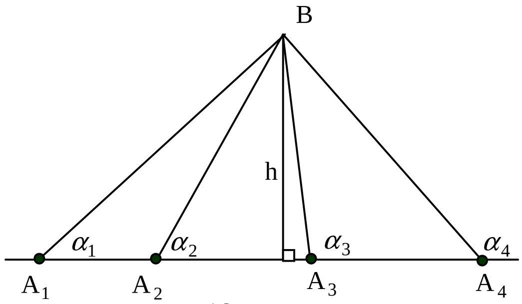

15. zīm.

Tāpat viegli saprast, ka ar vienu gājienu var nokrāsot augstākais divus no 15.zīm. izceltajiem 16 nogriežņiem. Tāpēc nepieciešami vismaz $\frac{16}{2} = 8$ gājieni.

10.1. Punktu (a; 0) un (0; b) koordinātas apmierina vienādojumu $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, tātad šie punkti atrodas uz uzdevumā minētās taisnes.

10.2. Nē. Ja $x^2+y^2=13xy$, tad $\left(\frac{x}{y}\right)^2-13\cdot\left(\frac{x}{y}\right)+1=0$ un $\frac{x}{y}=\frac{13}{2}\mp\frac{\sqrt{165}}{2}$. Bet $\sqrt{165}$ ir iracionāls skaitlis, tāpēc arī iegūtās $\frac{x}{y}$ vērtības ir iracionālas – pretruna.

10.3. $R_{12}=\frac{BA_2}{2\sin\alpha_1}=\frac{h}{2\sin\alpha_1\sin\alpha_2}$; līdzīgi $R_{34}=\frac{h}{2\sin\alpha_3\sin\alpha_4}$; $R_{13}=\frac{h}{2\sin\alpha_1\sin\alpha_3}$ un $R_{24}=\frac{h}{2\sin\alpha_2\sin\alpha_4}$. No tā seko vajadzīgais. (Ievērojam, ka punktu kārtība uz taisnes nav svarīga.)



16. zīm.

10.4. Ievērojam, ka $a^2+b^2+c^2\geq a^2+2bc=a^2+\frac{2}{a}$. Tāpēc pietiek pierādīt, ka $a^2+\frac{2}{a}\geq a+\frac{1}{a}+1$ jeb $a^2-a-1+\frac{1}{a}\geq 0\Leftrightarrow\frac{a^3-a^2-a+1}{a}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(a^2-1)(a-1)}{a}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(a-1)^2(a+1)}{a}\geq 0$, kas ir acīmredzams.

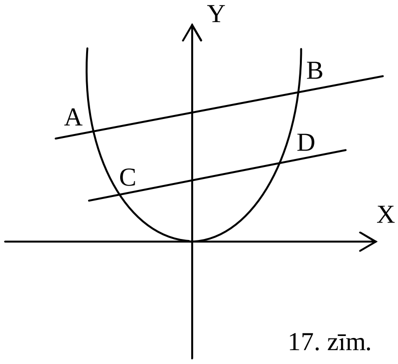
10.5. Atbilde: n=11

Risinājums. Apzīmēsim aktīvistus ar A; B; C; D; E; F. Desmit komisiju piemērs AB; AC; AD; AE; BC; BD; BE; CD; CE; DE parāda, ka jābūt n>10. Pieņemsim, ka n=11. Sadalām visas komisijas 5 grupās:

AB, CF, DE
AC, BD, EF
AD, BF, CE
AE, BC, DF
AF, BE, CD.

No jebkurām 11 komisijām atradīsies 3, kas ir vienā grupā (jo 2·5=10<11), un tās kopā saturēs visus aktīvistus.

11.1. Apzīmēsim taišņu vienādojumus ar $y=kx+b_1$ un $y=kx+b_2$. Tad punktu A un B abscisas ir vienādojuma $x^2=kx+b_1$ saknes, bet punktu C un D abscisas ir vienādojuma $x^2=kx+b_2$ saknes. Pēc Vjeta teorēmas $x_A+x_B=k$ un $x_C+x_D=k$, tātad $\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{x_C+x_D}{2}$. Tāpēc AB un CD viduspunktiem ir vienādas abscisas, no kā seko vajadzīgais.

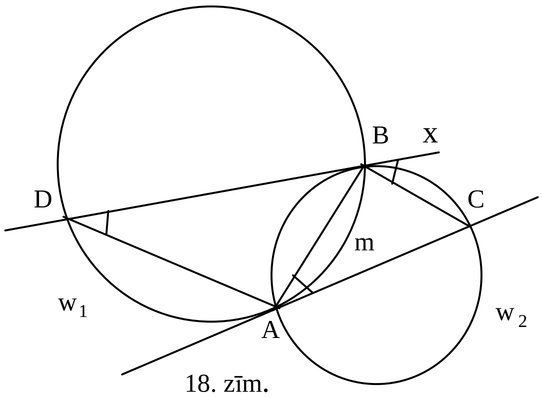


17. zīm.

11.2. Atbilde: 16 komisijas.

Risinājums. Var ņemt kopas $\{A;B;C;D;E\}$ visas iespējamās apakškopas, kas satur aktīvistu A; tādu ir 2^4=16. Tā kā pavisam ir 2^5=32 apakškopas (viena no tām – tukša), tad tās var sadalīt 32:2=16 pāros tā, ka neviena pāra apakškopām nav kopīgu locekļu un tās abas kopā satur visus 5 aktīvistus. Ja tiks veidotas vairāk nekā 16 komisijas, tad divas no tām būs no viena pāra, un tām nebūs kopīgu locekļu.

11.3. No hordas – pieskares leņķa un ievilkta leņķa īpašībām $\angle XBC = \frac{1}{2} \cup BC = \angle BAC = \frac{1}{2} \cup BmA = \angle BDA$. No tā un no kāpšļu leņķu īpašībām seko vajadzīgais.



18. zīm.

11.4. Apskatām trijstūri, kura divu leņķu lielumi ir α un β. Tad trešā leņķa lielums ir $\gamma+\delta+90^{o}$, tāpēc trijstūris ir platleņķa. No sinusu teorēmas tā malu garumi ir $2R\sin\alpha$; $2R\sin\beta$; $2R\sin(\alpha+\beta)$. No kosinusu teorēmas $(2R\sin(\alpha+\beta))^2 > (2R\sin\alpha)^2 + (2R\sin\beta)^2$, tāpēc

$\sin^2(\alpha+\beta) > \sin^2\alpha + \sin^2\beta \geq 2\sin\alpha\sin\beta$

Līdzīgi iegūstam

$\sin^2(\beta+\gamma) > 2\sin\beta\sin\gamma$

$\sin^2(\gamma+\delta) > 2\sin\gamma\sin\delta$

$\sin^2(\delta+\alpha) > 2\sin\delta\sin\alpha$.

Sareizinot šīs 4 nevienādības un velkot kvadrātsakni, iegūstam vajadzīgo.

11.5. Atbilde: nē, neeksistē.

Risinājums. Pieņemsim, ka tāds skaitlis M eksistē. No tā jāvar iegūt M_1, kas dalās ar 10000; tāpēc M satur vismaz 4 nulles. No M jāvar iegūt arī skaitli $\overline{abcdefgh}$, kas dalās ar 99999. Ievērojam, ka $\overline{abcdefgh} = \overline{abc} \cdot 10^5 + \overline{defgh} = \overline{abc} \cdot 99999 + (\overline{abc} + \overline{defgh})$, tāpēc $\overline{abc} + \overline{defgh}$ jādalās ar 99999.

Tā kā $\overline{abc} + \overline{defgh}$ <2·99999, tad jābūt $\overline{abc} + \overline{defgh}$ = 99999. Tāpēc d≠0, e≠0 un a+f=b+g=c+h=9. Bet tā nevar būt, jo vismaz 4 no cipariem a; f; b; g; c; h ir 0.

12.1. Jā. Dotās nevienādības ir ekvivalentas sistēmai $a-b<c$, $b-a<c$, $c<a+b$, kas reducējas par $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$. Uz to pašu reducējas pierādāmās nevienādības.

12.2. Nē. Viens no trim pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem $7^x\cdot 2^y-1$, $7^x\cdot 2^y$ un $7^x\cdot 2^y+1$ dalās ar 3. Tā kā tas nav $7^x\cdot 2^y$, tad viens no abiem apskatāmajiem skaitļiem dalās ar 3. Tā kā tas ir vismaz 13, tad tas nav pirmskaitlis.

12.3. Vispirms pierādīsim, ka $AC \parallel DE$. Ja patvaļīgas figūras F laukumu apzīmējam ar L(F), tad no dotā seko L(AED)=L(AEB)=L(ACB)=L(DCB)=L(DCE); bet no L(AED)=L(DCE) seko $AC \parallel DE$. Tātad DCD_1E un $DCBC_1$ ir paralelogrami; tātad $BC_1=CD=ED_1$. No $BC_1=ED_1$ seko vajadzīgais.

12.4. Atbilde: nepāra naturāliem n.

Risinājums. Pieņemsim, ka n ir pāra skaitlis un šāds polinoms P(t) eksistē. Tad patvaļīgam $a \neq 0$ pie $x=a$ un $x=-\frac{1}{a}$ iegūstam $P\left(a-\frac{1}{a}\right)=a^n-\frac{1}{a^n}$ un $P\left(-\frac{1}{a}+a\right)=\frac{1}{a^n}-a^n$, tātad $a^n-\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^n}-a^n$ un $2a^n=\frac{2}{a^n}$, no kurienes $a^{2n}=1$. Skaidrs, ka tas nav spēkā visiem apskatāmajiem a. Iegūta pretruna.

Parādīsim, ka katram nepāra naturālam n šāds polinoms P_n eksistē. Viegli pārbaudīt, ka pie n=1 der $P_1(t)=t$ un pie n=3 der $P_3(t)=t^3+3t$. Mēs apgalvojam: ja $P_n(t)$ un $P_{n+2}(t)$ apmierina uzdevuma prasības nepāra skaitļiem n un n+2, tad

$$P_{n+4}(t)=(t^2+2)\cdot P_{n+2}(t)-P_n(t)$$

apmierina uzdevuma prasības nepāra skaitlim n+4. Tiešām,

$$P_{n+4}\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right)\cdot\left(x^{n+2}-\frac{1}{x^{n+2}}\right)-\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)=$$
$$=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^{n+2}-\frac{1}{x^{n+2}}\right)-\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)=x^{n+4}-\frac{1}{x^{n+4}}.$$

12.5. Pavisam tiek izspēlētas $C_{28}^2=\frac{28\cdot 27}{2}=378$ spēles. Tā kā $378\cdot\frac{3}{4}=283{,}5$, tad vismaz 284 spēles beidzās neizšķirti. Tāpēc turnīrā pavisam izcīnītas ne vairāk kā 378-284=94 uzvaras un piedzīvoti ne vairāk kā 94 zaudējumi.

Aprēķināsim katrai komandai starpību starp tās uzvaru skaitu un zaudējumu skaitu. Pieņemsim, ka turnīra beigās visām komandām ir dažāds punktu skaits; tad visām 28 aprēķinātajām starpībām jābūt dažādām. Tāpēc ne vairāk kā viena no tām ir 0, un ir vismaz 27 nenulles starpības. Starp tām var izvēlēties vai nu ≥14 pozitīvas, vai ≥14 negatīvas. Pieņemsim, ka var atrast 14 pozitīvas starpības; otrs gadījums ir pilnīgi „simetrisks”.

Ievērosim, ka katrai komandai nav mazāk uzvaru nekā viņai aprēķinātā starpība. Tāpēc apskatāmajām 14 komandām kopā nav mazāk par 1+2+...+14=$(14\cdot 15)\cdot\frac{1}{2}=105$ uzvarām (saskaitījām četrpadsmit mazākos naturālos skaitļus). Tā ir pretruna ar sākumā aprēķināto, ka turnīrā nav vairāk par 94 uzvarām.

Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, k.b.j.