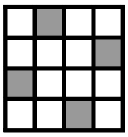
ĪSI ATRISINĀJUMI/ ATBILDES

5.1. Jā, var. Skat. 8. zīm.



8. zīm.

5.2. Nē, nevar. Tā kā summa ir pāra skaitlis, tad vismaz viens no pieciem (nepāra daudzuma) saskaitāmajiem arī ir pāra skaitlis. Bet tad reizinājums ir pāra skaitlis.

5.3. Atbilde: nē, nevar.

Risinājums. No vienu šķiras redzam, ka I=0. Tā kā $E \neq I$, tad E=1 (vieninieks, kas rodas pārnesumā no desmitu šķiras). Tātad uz tūkstošu šķiru pārnesuma nav; tāpēc jābūt vai nu D=0 (pretruna, jo tad D=I), vai arī D=5 (pretruna, jo tad P=1, tātad P=I). Tātad nevar būt, ka 2+2=5. ☺

5.4. Andris atdala 2 monētas un apgriež tās otrādi. Mēs apgalvojam, ka tagad starp šīm divām monētām ir tikpat monētu ar ciparu uz augšu, cik starp pārējām. Pierādījumā apskata visas 3 iespējas, cik sākumā starp tām bija monētu ar ciparu uz augšu.

5.5. Atbilde: astoņus skaitļus.

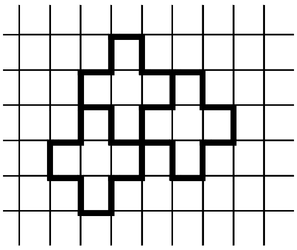
Risinājums. a) Var uzrakstīt, piemēram, skaitļus 1234; 123; 124; 134; 234; 12; 13; 14.

b) Visus iespējamos skaitļus sadalām 8 grupās:

1234;	134 un 2;	13 un 24;
123 un 4;	234 un 1;	14 un 23.
124 un 3;	12 un 34;	

Tā kā no katras grupas var paņemt augstākais vienu skaitli (diviem skaitļiem vienā grupā nav kopīgu ciparu), tad vairāk par 8 skaitļiem paņemt nevar.

6.1. Jā, var. Skat. 9. zīm.



9.zīm.

6.2. Skaitlis $\frac{n}{2}$ ir vesels skaitlis. Pareizinot to ar 10, iegūst skaitli ar tādu pašu ciparu summu. Bet $\frac{n}{2} \cdot 10 = 5n$.

6.3. Kad būs nokrāsoti 24 pilni spirāles loki, nenokrāsotas būs palikušas tikai rūtiņas 25. un 26. rindā (skaitot no augšas), un kreisās no tām būs 25. kolonnā (skatot no kreisās puses). Tāpēc kā pēdējo nokrāsos rūtiņu, kas atrodas 26. rindā no augšas un 25. kolonnā no kreisās puses.

6.4. Atbilde: a) var; b) nevar.

Risinājums. a) piemēram, tā: $\{1,10,11,20\}; \{2,9,12,19\}; \{3,8,13,18\}; \{4,7,14,17\}; \{5,6,15,16\}$.

b) visu skaitļu summa $1+2+...+20+21=231$ nedalās ar 5, tāpēc prasītais nav iespējams.

6.5. a) Apzīmēsim skolēnu iesniegto atrisinājumu daudzumus ar x_1, x_2... x_8 . Saskaņā ar doto $x_1 \leq 5; x_2 \leq 5 ...; x_8 \leq 5$ un $x_1 + x_2 + ... + x_8 = 5 \cdot 8 = 40$. Tāpēc $x_1=x_2=...=x_8=5$ (ja kaut viens $x_i<5$, tad $x_1+...+x_8<40$) .

b) Pieņemsim, ka viens no skolēniem atrisinājis uzdevumus A, B, C, D, E. Apzīmēsim pēdējos 3 uzdevumus F, G, H. Ja neviens no pārējiem 7 skolēniem nav atrisinājis F, G un H, tad katrs no viņiem atrisinājis ne vairāk kā divus no šiem uzdevumiem, tātad katrs no viņiem atrisinājis vismaz trīs no uzdevumiem A, B, C, D, E. Tāpēc uzdevumiem A, B, C, D, E kopā iesniegti vismaz $7 \cdot 3 + 5 = 26$ atrisinājumi – pretruna, jo katru no tiem atrisināja tieši 5 skolēni.

7.1. Pretpiemērs: 1989 vai, piemēram, 135135126.

7.2. Tā kā $adg \cdot beh = 1 \cdot 1 = 1$ un degh=2, tad $ab = \frac{1}{2}$. Līdzīgi $cf = ih = gd = \frac{1}{2}$. Visu 9 skaitļu reizinājums ir 1 (kā triju vieninieku reizinājums). Tāpēc e=16.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

10. zīm.

7.3. Visu pieskaitīšanu rezultātā skaitlis palielinājās ne vairāk kā par 300. Visu 31 skaitļu virknē (sākotnējais un iegūtie) ir vai nu ≥ 16 skaitļi, kas dalās ar 22, vai ≥ 16 skaitļi, kas dalās ar 25. Pirmajā gadījumā katrs nākošais no šiem skaitļiem pārsniedz iepriekšējo par vismaz 22, tāpēc starpība starp pirmo un pēdējo no tiem ir vismaz $15 \cdot 22 = 330 > 300$ - pretruna. Otro gadījumu apskata līdzīgi.

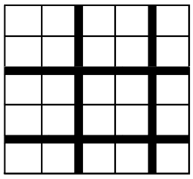
7.4. Piemēram, 1:((2:3):((4:((5:6):(7:8))):(9:10))) .

7.5. Atbilde: 9.

Risinājums. a) Piemēru skat. 11. zīm.

a	b	a	b	a
d	c	d	c	d
a	b	a	b	a
d	c	d	c	d
a	b	a	b	a

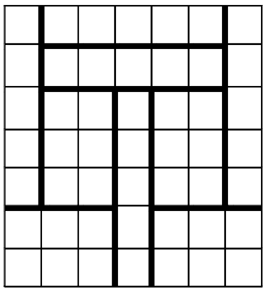
11.zīm.



12.zīm.

b) nevienā no 12.zīm. redzamajām 9 daļām nedrīkst būt vairāk par vienu burtu a. Tāpēc to kopskaits nevar pārsniegt 9.

8.1. Jā, var. Skat., piem., 13.zīm.



13. zīm.

8.2. Atbilde: nē.

Risinājums. Apzīmēsim Dzintara uzrakstītos skaitļus ar a, b, c, d. Pieņemsim, ka minētās summas var iegūt; varam uzskatīt, ka a+b+c=4 un a+b+d=5. Tad

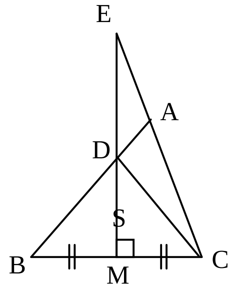
9=4+5=(a+b+c)+(a+b+d)=2a+2b+c+d>a+b+c+d>9,

jo visu uzrakstīto skaitļu summa lielāka par to 3 skaitļu summu, kas vienāda ar 9; esam ieguvuši pretrunu.

8.3. Atbilde: nē.

Risinājums. Ja n ir nepāra skaitlis, tad arī n+2 ir nepāra skaitlis, un tad n·(n+2) ir nepāra skaitlis un nevar beigties ar pāra ciparu 6. Ja n ir pāra skaitlis, tad arī n+2 ir pāra skaitlis, un tad n·(n+2) dalās ar 4. Bet skaitlis 200720052006 ar 4 nedalās, jo tā divu pēdējo ciparu veidotais skaitlis nedalās ar 4.

8.4. Tā kā $\Delta BMD=\Delta CMD$ (mlm), tad $\angle EDA=\angle BDM=\angle CDM>\angle CEM$ (ārējais leņķis trijstūrī CDE). Bet ΔEDA pret lielāko malu atrodas lielākais leņķis, tāpēc AE>AD.



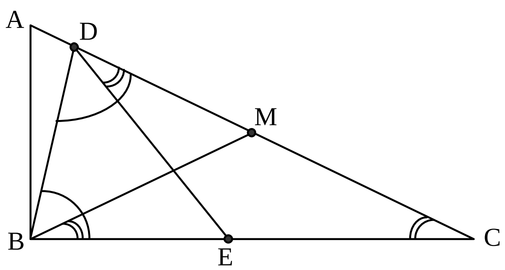
14.zīm.

8.5. Uzliekam uz katra no kausiem pa 100 monētām. Vai nu uz smagākā kausa (ja viens nosveras uz leju), vai uz katra no kausiem (ja tie ir līdzsvarā) nav vairāk par 3 viltotām monētām. Ņemam šo monētu simtnieku un uzliekam pa 50 monētām uz katra no kausiem; līdzīgi kā iepriekš noskaidrojam, starp kurām 50 monētām nav vairāk par 1 viltotu. Pēc tam, tāpat rīkojoties ar šīm monētām, atrodam prasītās 25 monētas.

9.1. No dotā seko, ka $\sqrt{p^2-4q}\geq 6 \Leftrightarrow p^2-4q\geq 36$. Starpība starp otrā kvadrātvienādojuma saknēm ir $\sqrt{4p^2-12q}=\sqrt{p^2+3\left(p^2-4q\right)}\geq\sqrt{3\cdot 36}=\sqrt{108}>10$.

9.2. Pieņemsim ,ka Andrim bija a konfekšu un viņš apēda x konfektes; tad Maija apēda 8x konfektes, un $a-x=9(a-8x)\Rightarrow 8a=71x$. Tātad 8a dalās ar 71. Tā kā LKD(8, 71)= 1, tad a dalās ar 71, kas bija jāpierāda.

9.3. Skat. 15. zīm.



15. zīm.

Apzīmējam hipotenūzas AC viduspunktu ar M; tad MA = MB = MC. Tāpēc $\angle MBC=\angle MCB=\angle DCE=\angle EDC$ (vienādsānu trijstūru leņķi pie pamata). No vienādsānu trijstūra BCD seko $\angle BDC=\angle DBC$. Tāpēc $\angle BDE=\angle BDC-\angle EDC=\angle DBC-\angle MBC=\angle DBM$. Tāpēc $\Delta EBD=\Delta MDB$ (lml), tātad EB = MD un ED = MB. Tāpēc

AD + BE = AD + DM = AM = BM = DE, k.b.j.

9.4. Atbilde: 5 krāsas.

Risinājums. Piemēru ar 5 krāsām skat. 16. zīm. Ja krāsu būtu vismaz 6, tad dažādu krāsu pāru būtu vismaz 15, bet ir tikai 12 rūtiņu malas, pa kurām rūtiņas var saskarties.

a	b	d
c	e	a
b	d	c

16. zīm.

	a	z
x		b
c	y	

17. zīm.

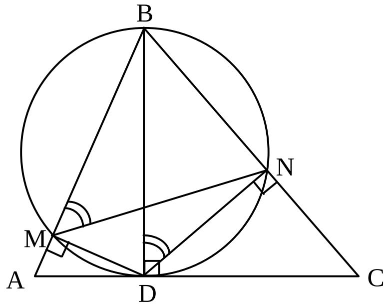
9.5. Izdarāmo gājienu rezultātā lielumus $\frac{abc}{xyz}$ (skat. 17. zīm.) nemainās. Tā kā sākotnējā un iegūstamajā tabulā tam ir dažādas vērtības, prasītā pārveidošana nav iespējama.

10.1. Apzīmējam $f(x)=ax^2+bx+c$. No dotā seko, ka $f(1)\cdot f(-3)<0$, tāpēc $f(x)$ maina zīmi intervālā $(-3;1)$, t.i., funkcijas grafiks **krusto** Ox asi starp punktiem (-3) un 1. Tāpēc šai parabolai ir vēl otrs krustpunkts ar Ox asi.

10.2. Skaitļi 24 un 50 abi ir pāra skaitļi. Tāpēc, dalot ar tiem, vai nu abi atlikumi ir pāra skaitļi, vai arī abi ir nepāra skaitļi. Tāpēc atlikums, dalot ar 3, ir nepāra skaitlis. Tāpēc tas ir 1.

10.3. Ja trijstūra laukums ir L, tad tā malu garumi ir $\frac{2L}{24}$, $\frac{2L}{30}$ un $\frac{2L}{40}$. Trijstūris, kura malu garumi ir $\frac{60}{L}$ reizes lielāki nekā pētāmajam, ir tam līdzīgs; bet tā malu garumi ir 5, 4 un 3 ,tātad tas ir taisnleņķa. Tātad arī dotais trijstūris ir taisnleņķa; tāpēc tā divi garākie augstumi ir tā katetes, un tā laukums ir $\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 40=600$.

10.4. Tā kā $\angle BMD+\angle BND=90^o+90^o=180^o$, tad ap BNDM var apvilkt riņķa līniju. Tāpēc $\angle BMN=\angle BDN$ (ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku). Bet $\angle NCD=90^o-\angle NDC=\angle BDN$, tātad $\angle NCD=\angle BMN$. Tāpēc $\angle AMN+\angle ACN=\angle AMN+\angle BMN=180^o$, no kā seko prasītais.



18. zīm.

10.5. Viegli pārbaudīt, ka $x=\left(-\sqrt[3]{2x}\right)^3+\left(x-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3+\left(x+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3$.

Ceļot šo vienādību 2006. pakāpē (un labajā pusē atstājot visus kubu reizinājumus), iegūstam vajadzīgo izteiksmi pakāpei x^{2006} (labajā pusē ir 3^{2006} kubi).

11.1. Abām funkcijām diskriminanti ir vienādi. Tas nozīmē, ka abiem vienādojumiem $f(x)=0$ un $g(x)=0$ vai nu abiem ir pa divām saknēm, vai abiem – pa vienai saknei, vai abiem sakņu nav. Tāpēc vai nu abas minimālās vērtības ir pozitīvas, vai abas – negatīvas, vai abas – nulle. No šejienes seko vajadzīgais.

11.2. Atbilde: 191.

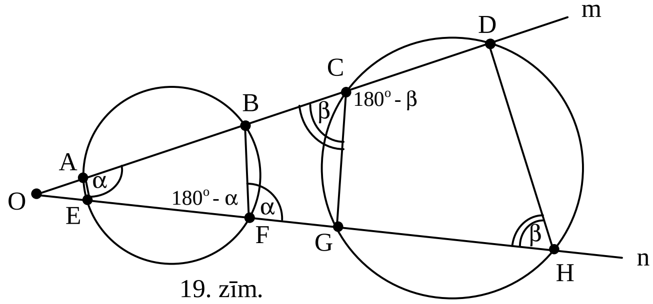
Risinājums. Vismaz 19 no minētajiem skaitļiem nav 1. Pieņemsim, ka tie ir $d_1<d_2<...<d_{18}<d_{19}$. Tad dalītāji

$$
\begin{gathered}
1<\\
<d_1<d_2<...<d_{19}<\\
<d_1d_{19}<d_2d_{19}<...<d_{18}d_{19}<\\
<d_1d_{18}d_{19}<d_2d_{18}d_{19}<...<d_{17}d_{18}d_{19}<\\
\dots\\
<d_1d_3d_4...d_{18}d_{19}<d_2d_3d_4...d_{18}d_{19}<\\
<d_1d_2d_3d_4...d_{18}d_{19}
\end{gathered}
$$

visi ir dažādi, jo katrs nākošais lielāks par iepriekšējo, un to skaits ir $1+(19+18+17+...+2+1)=191$.

Ja $n=1\cdot 2^1\cdot 2^2\cdot ...\cdot 2^{19}=2^{190}$, tad skaitlim n ir tieši 191 dažāds naturāls dalītājs.

11.3. Gan B, C, G, F, gan arī A, D, H, E atrodas uz vienas riņķa līnijas tad un tikai tad, ja $\alpha+\beta=180^{o}$ (skat. 19. zīm.).



19. zīm.

11.4. Pie x = 1 iegūstam $f(3)=(f(1))^2+2$; pie x = 3 iegūstam $f(1)=(f(3))^2+2$. Ievietojot (un apzīmējot $f(1)=a$), iegūstam

$$a=\left(a^2+2\right)^2+2.$$

Tas nav iespējams. Tiešām, ja tā būtu ,tad a > 2; bet tad $a^2+2>a>2$ un

$a=\left(a^2+2\right)^2+2>\left(a^2+2\right)^2>a^2+2>a$ – pretruna.

11.5. Lemma. Ja tabulā ir 1 rindiņa ar n rūtiņām un tajā izvietotas $\geq 2^{n-1}$ monētas, tad var panākt, lai pēdējā rūtiņā atrastos kāda monēta.

Lemmu pierāda ar matemātisko indukciju. Bāze n = 1 ir triviāla. Apskatām pāreju. Ja sākumā pēdējā rūtiņā jau ir kāda monēta, viss kārtībā. Pretējā gadījumā apskatām $1\times(n-1)$ tabulu, kurā ir **divi komplekti** monētu, katrā pa $\geq 2^{n-2}$ monētām; saskaņā ar induktīvo hipotēzi katrs no šiem komplektiem var „nogādāt" (n-1)-ā rūtiņā vismaz vienu monētu. Tās abas izmantojot, iegūst vajadzīgo tabulai $1\times n$. Lemma pierādīta.

Piešķiram rūtiņām koordinātas, kā parādīts 20. zīmējumā.

1					
2					
	1	2	3	…	n

20. zīm.

Risinām ar indukciju sākotnējo uzdevumu. Pie n = 1 apgalvojums ir acīmredzams (ir tikai 3 sākuma konfigurācijas). Pieņemsim, ka tas patiess tabulām $2\times(n-1)$. Apskatām tabulu $2\times n$. Šķirojam iespējas:

a) n-jā kolonnā ir ≥ 2 monētas; viss acīmredzams

b) n-jā kolonnā ir 1 monēta. Ja tā ir rūtiņā (1, n), viss jau ir kārtībā. Ja tā ir rūtiņā (2, n), tad **tabulā** $\mathbf{2\times(n-1)}$ ir 2^n-1 monētas. Ir divi apakšgadījumi:

b$_1$) 1. rindiņā ir $\geq 2^{n-1}$ monētas; lietojam lemmu tabulas $2\times n$ augšējai rindiņai.

b$_2$) 1. rindiņā ir $<2^{n-1}$ monētas; tad 2. rindiņā ir $\geq 2^{n-1}$ monētas. Lietojot lemmu, nogādājam vienu no tām rūtiņā (2, n) un ar nākošo gājienu sasniedzam vajadzīgo.

c) n-jā kolonnā monētu nav. Tad tabulā $2\times(n-1)$ ir divi komplekti, katrā pa 2^{n-1} monētām. Saskaņā ar induktīvo hipotēzi nogādājam rūtiņā (1, n-1) 2 monētas, un ar nākošo gājienu sasniedzam mērķi.

12.1. Sešu elementu kopai ir $2^6=64$ apakškopas. Sadalām tās pāros tā, ka katra kopa ir pārī ar savu papildinājumu; pavisam ir 32 pāri. Abas apakškopas no viena pāra nevar veidot komisijas, jo tām nav kopīga elementa; tātad komisiju nevar būt vairāk par 32. Lai izveidotu 32 komisijas, var rīkoties šādi:

ņemam 1 komisiju, kas satur visus sešus cilvēkus;
ņemam 6 komisijas, kas satur pa pieciem cilvēkiem;
ņemam $C_6^2=15$ komisijas, kas satur pa četriem cilvēkiem;

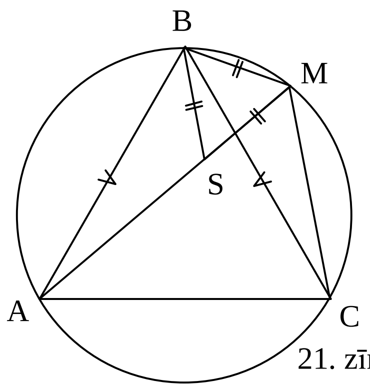
ņemam $C_5^2 = 10$ komisijas, kas satur pa trim cilvēkiem;

pie tam viens no tiem visās 10 komisijās ir viens un tas pats cilvēks A.

Ievērojam, ka 1 + 6 + 15 + 10 = 32.

Konstrukcijas pareizības pārbaudē lietderīgi ievērot faktu: ja divās komisijās kopā ir vairāk par 6 locekļiem, tad tām noteikti ir kopējs loceklis.

12.2.



21. zīm.

Ievērojam, ka $\angle BMA = \angle BCA = 60^o$ .Atliekam MS = MB; tad ΔBMS ir vienādsānu ar virsotnes leņķi 60°, tātad regulārs. Tāpēc BS = BM. Ievērojam arī, ka BA = BC un $\angle ABS = 60^o - \angle SBC = \angle CBM$. Tāpēc $\Delta ABS = \Delta CBM$ (mlm), tātad AS = CM; tāpēc $CM + BM = AS + SM = AM$, k. b. j.

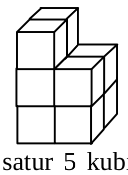
123. Vienādība pārveidojas par $\frac{n(n+1)}{2} + 2 = k^2$ un tālāk par $n(n+1) = 2k^2 - 4$. Kreisā puse dod atlikumus 0; 2; 6; 3; 2; 3; 6; 2; 0, dalot ar 9; labā puse dod atlikumus 5; 7; 4; 5; 1; 1; 5; 4; 7, dalot ar 9. Tāpēc vienādība nav iespējama.

12.4. Atverot iekavas, nevienādība pārveidojas par

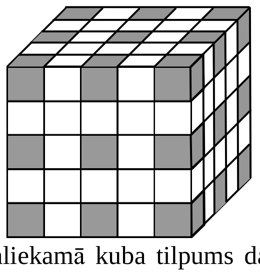
$$15abc \le a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + a^2b + ab^2 + ab^2 + a^2c + a^2c + ac^2 + ac^2 + b^2c + b^2c + bc^2 + bc^2 ,$$

kas seko no nevienādības starp 15 skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

12.5. a) No diviem ķieģeļiem var salikt figūru, kāda parādīta 22. zīm., no divām tādām figūrām - taisnstūra paralēlskaldni ar izmēriem 2x2x5, no 50 tādiem paralēlskaldņiem - kubu ar izmēriem 10x10x10.



22. zīm.



23. zīm.

b) tā kā ķieģelis satur 5 kubiņus, tad saliekamā kuba tilpums dalās ar 5 (pieņemt kubiņa šķautnes garumu par 1). Tāpēc vienīgais kubs, kas ir mazāks par 10x10x10 un ko varbūt varētu salikt no ķieģeļiem, ir kubs ar izmēriem 5x5x5; tad tas sastāvētu no 25 ķieģeļiem. Nokrāsosim šajā kubā 27 kubiņus pēc 23. zīm. redzamās shēmas. Viens ķieģelis var saturēt augstākais 1 nokrāsoto kubiņu; tāpēc 23. zīm. redzamo kubu no ķieģeļiem salikt nevar.