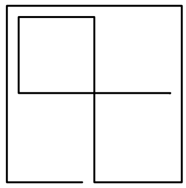
ĪSI ATRISINĀJUMI/ ATBILDES

5.1. Skat. 5.zīm.



5.zīm.

5.2. No a) seko: **krāsu nav vairāk kā 3.**
No b) seko: **nevienā krāsā nav vairāk kā 3 zīmuļi.**
Tātad ir tieši 3 krāsas un katrā no tām (arī zilajā) – tieši 3 zīmuļi (citādi kopējais zīmuļu skaits būtu mazāks nekā 9).

5.3. Mazākā iespējamā kreisās puses vērtība ir $2082+4817=6899$; lielākā iespējamā labās puses vērtība ir $2917+3982=6899$.
Tātad vienīgā iespēja izpildīt uzdevumu ir

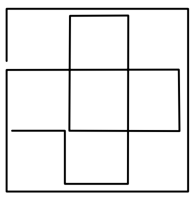
$$2082+4817=2917+3982 .$$

5.4. Nokrāsojot melnu katru no sākotnējām baltajām joslām, viss krekls kļūst melns 24 gājienos. Sākumā joslu ir 49; beigās ir tikai viena „josla”. Ar katru gājienu joslu skaits samazinās ne vairāk kā par 2. Tātad nepieciešami vismaz $(49-1):2=24$ gājieni.

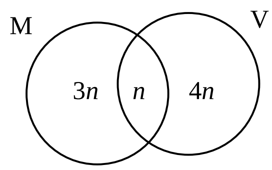
5.5. Piemēram, tā:

Sākumā:	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Pēc 1.d.:	1	2	3	4	**5**	**6**	**7**	**8**	1	2	3	4	**5**	**6**	**7**	**8**
Pēc 2.d.:	1	2	**3**	**4**	1	2	**3**	**4**	1	2	**3**	**4**	1	2	**3**	**4**
Pēc 3.d.:	1	**2**	1	**2**	1	**2**	1	**2**	1	**2**	1	**2**	1	**2**	1	**2**
Pēc 4.d.:	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
Pēc 5.d.:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6.1. Skat. 6.zīm.



6.zīm.



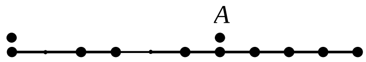
7.zīm.

6.2. Jā; piemēram, $11112<11121<11211<12111<21111$.

6.3. Skat. 7.zīm. **Atbilde:** pusei. Protams, skolēna risinājumā nepieciešami sīkāki paskaidrojumi.

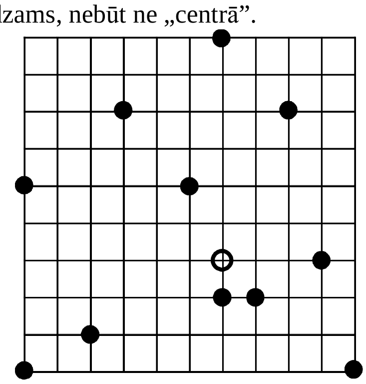
6.4. Izvēlēsimies vienu profesoru *A*. Viņš sarakstās ar 5 citiem. Tā kā $5>2\cdot 2$, tad vai nu var atrast 3 profesorus, ar kuriem viņš sarakstās angliski, vai arī var atrast 3 profesorus, ar kuriem viņš sarakstās latviski. Apskatīsim abas iespējas atsevišķi.
1. *A* sarakstās angliski ar *B*; *C*; *D*. Saskaņā ar uzdevumā doto *B*, *C*, *D* visi savā starpā sarakstās latviski.
2. *A* sarakstās latviski ar *B*; *C*; *D*. Ne visi profesori *B*; *C*; *D* savā starpā sarakstās angliski; tie no viņiem, kas sarakstās latviski, kopā ar *A* veido meklējamo trijnieku.

6.5..Veicamie ceļi sastāv no horizontāliem un vertikāliem nogriežņiem. Minimizēsim horizontālo posmu garumu summu. Projicēsim visus dotos punktus uz taisnstūra apakšējās malas:



Viegli pārliecināties, ka horizontālo pārvietojumu summa būs vismazākā, ja „satikšanās vieta” būs uz vertikāles *A*.

Līdzīgi analizējot vertikālos pārvietojumus, atrodam, ka „satikšanās vietai” jābūt ar aplīti apvilktajā virsotnē (skat. 8.zīm.) – kā redzams, nebūt ne „centrā”.



8. zīm.

7.1. No $c \,\vdots\, a$ seko, ka $c > a$; no nevienādības seko, ka b ir starp a un c. Tātad skaitļu secība ir $a < b < c$.

7.2. a) nē; taisnes nedrīkst sakrist, un 6 dažādām taisnēm pa pāriem var būt augstākais 15 krustpunkti (*ab, ac, ad, ae, af, bc, bd, be, bf, cd, ce, cf, de, df, ef*).

b) jā; divas taisnes paralēlas, citu paralelitāšu nav un visi krustpunkti dažādi.

7.3. Skat., piem., 9. zīm.

29	34	39	44	49
22	27	32	37	42
15	20	25	30	35
8	13	18	23	28
1	6	11	16	21

9.zīm.

7.4. Apskatīsim 1. 3. 5. 7. 9. ciematus un saskaitīsim tos attālumus, kurus izmērīja šo ciematu iedzīvotāji. Šie attālumi ir **nepārklājošos** šoseju posmu garumi, tāpēc to summa mazāka par 30 km. Tāpēc piecu atlikušo šosejas posmu garumu summa ir lielāka par $100 - 30 = 70$ (km). Tāpēc vismaz viens no tiem ir garāks par $70 : 5 = 14$ (km).

7.5. Abos gadījumos atbilde ir „nē”.

a) ievērosim, ka ar katru gājienu, pārkrāsojot x melnas rūtiņas baltas un $(8 - x)$ baltas rūtiņas melnas, melno rūtiņu skaits kvadrātā mainās par $\left|x - (8 - x)\right| = \left|2x - 8\right|$, t.i., par pāra skaitli. Tā kā sākumā tas ir 0, tad tas nevar kļūt 17;

b) pieņemsim, ka tas izdarīts. Tad ir vismaz 2 baltas rindas. Koncentrēsimies uz vienu baltu rindu r. Pastāv divas iespējas:

b1) šī rinda mainīta pāra skaitu reižu un **visas** kolonnas – arī pāra skaitu reižu,

b2) šī rinda mainīta nepāra skaitu reižu un **visas** kolonnas – arī nepāra skaitu reižu.

Skaidrs, ka rezultāts nav atkarīgs no tā, kādā secībā izdara gājienus. Varam pieņemt, ka vispirms izdarītas **visas** maiņas kolonnās (pēc tam vai nu visa tabula ir balta, vai visa – melna), un pēc tam – maiņas rindās. Bet, izdarot maiņas rindās, balto rūtiņu skaits visu laiku mainās par 8; tāpēc, sākot no 0 vai 64, tas nevar kļūt 6. Iegūta pretruna.

8.1. Pirmais skaitlis dalās ar 9, otrais ar 11 (dalāmības pazīmes); $359999 = 360000 - 1 = 600^2 - 1 =$ $= (600+1)\cdot(600-1) = 601\cdot 599$ (starp citu, 601 un 599 abi ir pirmskaitļi).

8.2. Apzīmēsim nepilno dalījumu pirmajā dalīšanā ar *x*. Tad $n = 9x + x = 10x$, turklāt $x \le 8$. Tātad *n* dalās ar *10* un $n \le 80$. Līdzīgi iegūstam $n = 15y$, tātad n dalās ar *15*. Līdz ar to *n* **varētu būt** tikai 30 vai 60. Pārbaude parāda, ka abas šīs vērtības der.

8.3. Pēc dotā ΔABM ir vienādsānu. No $\angle BAM + \angle BAN = 180°$ seko

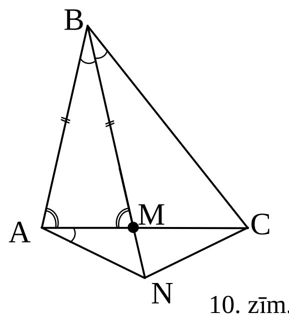
$\angle BAM + (\angle BAM + \angle MAN) = 180°$

$\angle BAM + \angle BMA + \angle MAN = 180°$ (1)

Bet arī

$\angle BAM + \angle BMA + \angle ABM = 180°$ (2)

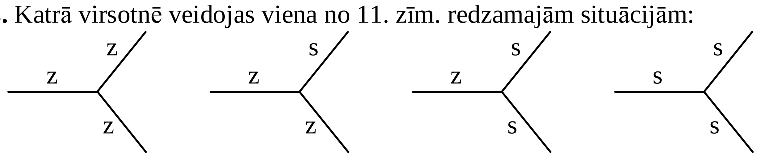
No (1) un (2) seko, ka $\angle NAM = \angle ABM = \angle MBC$. Tā kā no ārējā leņķa īpašības $\angle BMC = \angle ABM + \angle BAM = \angle MAN + \angle BAM = \angle BAN$, tad $\Delta BAN = \Delta BMC$ (lml). No tā seko vajadzīgais.



10. zīm.

8.4. Atbilde: nē.

Risinājums. Katrā virsotnē veidojas viena no 11. zīm. redzamajām situācijām:

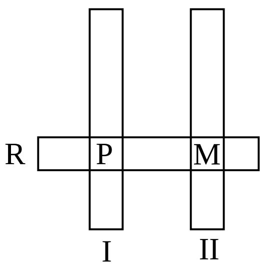


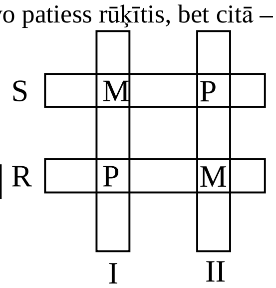
11. zīm.

Redzam, ka katrā virsotnē veidojas 0 vai 2 saskarsmes „sarkans – zaļš”. Tāpēc minētajai summai noteikti jābūt pāra skaitlim.

8.5. Pierādīsim, ka katrā rindā vai nu visi rūķīši ir patiesi, vai visi rūķīši ir meļi. No tā seko uzdevuma apgalvojums.

Pieņemsim pretējo: katrā rindā vienā rūtiņā dzīvo patiess rūķītis, bet citā – melis (12. zīm.)





12. zīm. 13. zīm.

Tad kolonnā I meļu ir vairāk nekā rindā R, bet kolonnā II meļu ir ne vairāk kā rindā R. **Tātad kolonnā I meļu ir vairāk nekā kolonnā II.** Tāpēc eksistē tāda rinda S, kurā I kolonnā dzīvo melis, bet otrajā – patiess rūķītis (13. zīm.)

Spriežot par šiem rūķīšiem tāpat kā par rūķīšiem rindā R, iegūstam: **kolonnā II meļu ir vairāk nekā kolonnā I.** Iegūta pretruna.

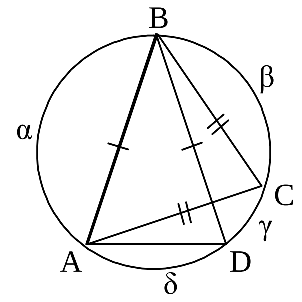
9.1. No sakarībām $a^2 \geq b^2$ un $b^2 \geq a^2$ seko $a^2 = b^2$ un tālāk $|a| = |b|$. Ja $a = b$, abiem vienādojumiem kopā ir viena sakne $x = -a$. Ja $a = -b \neq 0$, abiem vienādojumiem kopā ir divas saknes $\pm a$.

9.2. Atbilde: 10.

Risinājums. Apskatāmajām taisnēm ir 10 dažādi virziena koeficienti, tātad vairāk nekā 10 no tām caur vienu punktu iet nevar. No otras puses, caur punktu $(0;1)$ iet visas taisnes $y = ax + 1$, $a = 1;2;...;10$.

9.3. No tā, ka vienādas hordas savelk vienādus lokus, seko, ka

$$\alpha = \beta + \gamma$$
$$\beta = \delta + \gamma$$
$$\alpha + 2\beta = 360°$$
(*)



14. zīm.

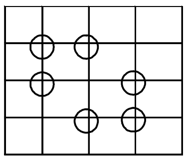
Tā kā $\alpha = \beta + \gamma > \beta$, tad no (*) seko $\alpha > 120°$; tad atkal no (*) seko, ka $\beta < 120°$; tāpēc $\gamma + \delta = \beta < 120°$ un $\angle ABC = \frac{1}{2}(\gamma + \delta) < 60°$, k.b.j.

9.4. Atbilde: 22 meļi.

Risinājums. Visi nevar būt meļi, jo tad iznāktu, ka visi runā patiesību – pretruna. Izvēlēsimies vienu patieso cilvēku un apzīmēsim to ar C_1; nākošos pulksteņa rādītāja kustības virzienā apzīmēsim ar C_2, C_3, ..., C_{23}, C_{24}. Tad C_2, C_3, ..., C_{12} ir meļi (to apgalvo C_1) un arī C_{24}, C_{23}, ..., C_{14} ir meļi (jo viņi samelojuši attiecībā uz C_1). Ja C_{13} būtu melis, tad C_2 būtu runājis patiesību – pretruna; tātad C_{13} ir patiess cilvēks. Pārbaude parāda, ka visas uzdevuma prasības izpildītas.

9.5. Atbilde: a) var, b) nevar.

Risinājums. a) Kvadrātā 4×4 prasīto var sasniegt, izdarot izmaiņas 2×2 rūtiņu kvadrātos, kuru centri parādīti 15. zīmējumā; tā kā 16×16 kvadrāts sadalās 4×4 kvadrātos, prasītais sasniedzams arī tur.



15. zīm.

b) **katra** izmaiņa skar visu centrālo 2×2 rūtiņu kvadrātu, tātad tur visas rūtiņas vienmēr ir vienā krāsā. Tātad prasītais nav sasniedzams.

10.1. a) vai nu n, vai $n+1$ ir pāra skaitlis;

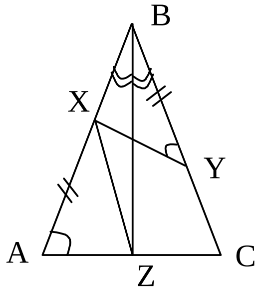
b) $\frac{R}{n+1} = n(n+2)(n+4)(n+6)$. Ja $\frac{R}{n+1}$ dalās ar 2, tad vismaz viens (un tātad visi) no skaitļiem n; n+2; n+4; n+6 ir pāra skaitļi. Tā kā tie ir pēc kārtas ņemti pāra skaitļi, tad divi no tiem dalās ar 4; viens no šiem abiem skaitļiem (kas ir pēc kārtas ņemti ar 4 dalošies skaitļi) dalās ar 8. Tātad reizinājums dalās ar $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 = 128$, k.b.j.

10.2. Apskatām funkciju $f(x) = ax^2 + bx - c$. Tā kā $f(0) = -c < 0$ un $f(1) = a + b - c > 0$ (trijstūra nevienādība), tad starp 0 un 1 eksistē tāds x_0, ka $f(x_0) = 0$; otra sakne ir negatīva, jo sakņu reizinājums ir $-\frac{c}{a} < 0$.

10.3. No dotā seko $AX : XB = BY : XB$.

No trijstūru XYB un CAB līdzības (ll) seko $BY : XB = AB : BC$

No bisektrises īpašības seko $AB:BC = AZ:ZC$
Iegūstam $AX:XB = AZ:ZC$.
No Talesa teorēmas seko vajadzīgais.



16. zīm.

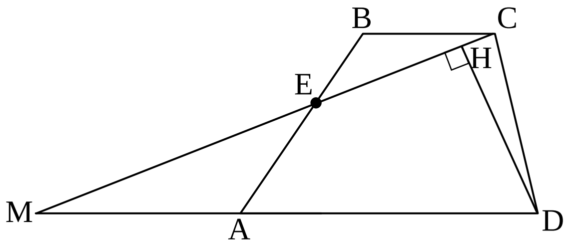
10.4. Pieņemsim pretējo: katra rindiņa krusto pāra skaitu dalījumu kvadrātu. Tā kā rindā ir nepāra skaits rūtiņu, tad tā krusto nepāra skaitu 3×3 kvadrātu, tātad arī nepāra skaitu 2×2 kvadrātu. Tātad rinda satur nepāra skaitu „domino kauliņu" 1×2. Tā kā tas attiecas uz katru rindu, tad kvadrātā kopā ir nepāra skaits šādu „domino kauliņu". Bet tā nevar būt, jo no katra 2×2 kvadrāta rodas divi šādi „domino kauliņi".

10.5. Aplūkosim **pirmo** figūriņu F, kas atgriežas savā sākotnējā pozīcijā. **Vienu gājienu pirms brīža, kad tas notiek,**
a) visas figūriņas **jau ir** aizgājušas no sākotnējām pozīcijām, jo F ir nonākusi visās rūtiņās (izņemot savu galamērķi),
b) neviena figūriņa **vēl nav** atgriezusies sākotnējā pozīcijā, jo F būs pirmā, kas to izdarīs.
Tātad šis brīdis der par meklējamo.

11.1. Sadalīsim 10-stūra virsotnes divos regulāru piecstūru virsotņu komplektos. Viens no šiem komplektiem satur vismaz trīs atzīmētas virsotnes. Bet **katras** 3 regulāra piecstūra virsotnes veido vienādsānu trijstūri.

11.2. Piemēram, tādi ir visi skaitļi formā $(3n+2)^2$, $n\in \mathrm{N}$. Tiešām, ja būtu $(3n+2)^2 = x^2 + p$, kur $x\geq 0$, $x\in \mathrm{Z}$, tad $(3n+2)^2 - x^2 = p$ un $(3n+2+x)(3n+2-x) = p$.
Tas iespējams tikai tad, ja $3n+2-x=1$ un $3n+2+x=p$; tad $x=3n+1$ un $p=6n+3=3(2n+1)$, tātad p nav pirmskaitlis – pretruna.

11.3. Pagarināsim CE līdz krustpunktam M ar AD pagarinājumu.



17. zīm.

Tā kā $\Delta AME \sim \Delta BCE$, tad AM:BC=AE:BE. Tāpēc AM:BC=AD:BC, no kurienes seko AM=AD. Tāpēc taisnleņķa trijstūrī MHD AH ir mediāna pret hipotenūzu un AD – puse no hipotenūzas; tātad AH=AD, k.b.j.

11.4. Pieņemsim, ka vienādojumam $f(x)=x$ ir sakne x_0; tad $f(x_0)=x_0$ un arī $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$ – pretruna ar doto. Tātad vienādojumam $ax^2 - x + c = x$ jeb $ax^2 - 2x + c = 0$ nav sakņu; no tā seko vajadzīgais.

11.5. Saliksim visas monētas vienā kaudzē. Mēs apskatīsim procesu, kura gaitā monētas varēs
a) palikt kaudzē,
b) nonākt kabatā,
c) tikt vispār izslēgtas no turpmākās analīzes.

Vispirms salīdzināsim savā starpā divas monētas. Ja tās ir ar vienādām masām, ieliekam tās abas kabatā. Ja tās ir ar dažādām masām, izslēdzam tās no tālākas analīzes: vismaz viena no tām ir viltota, tāpēc mums joprojām analīzei paliek vairāk īstu monētu nekā viltotu.

Ar katru nākošo gājienu

a) ja kabatā ir kaut viena monēta, salīdzinām to ar kādu monētu no kaudzes,

b) ja kabatā nav nevienas monētas, salīdzinām divas monētas no kaudzes,

un atkarībā no svēršanas rezultāta rīkojamies, kā iepriekš aprakstīts.

Ievērosim: 1) ja kabatā vispār ir kādas monētas, tad tām visām masas ir vienādas, 2) vairāk nekā puse no vēl neizslēgtajām monētām vienmēr ir īstas, 3) kabatā un kaudzē esošo monētu daudzumu paritātes vienmēr ir vienādas, jo monētas „izslēdz" pa pāriem, 4) kaudzē esošo monētu daudzums katrā gājienā samazinās par 2 vai par 1.

Mēs apgalvojam, ka iestāsies brīdis, kad kaudzē būs tieši 2 monētas. Tiešām, saskaņā ar 4) pienāks brīdis, kad kaudzē ir 3 vai 2 monētas. Ja tur ir 3 monētas, tad ar kārtējo gājienu monētu skaits kaudzē var kļūt 1 (tādējādi „pārlecot" vērtībai 2) tikai tad, ja kabatā nav nevienas monētas; bet saskaņā ar 3) tā nevar būt.

Šķirojam vairākas iespējas.

I. Kabatā monētu nav. Tad saskaņā ar 2) abas monētas kaudzē ir īstas.

II. Kabatā ir vismaz 2 monētas (visas tur esošās monētas ir ar vienādu masu). Saskaņā ar 2) visas kabatā esošās monētas ir īstas.

Gadījums, kad kabatā ir tieši viena monēta, saskaņā ar 3) nav iespējams.

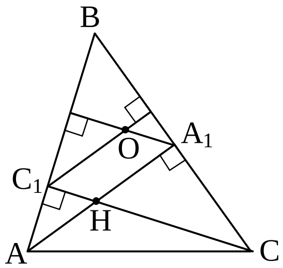
Tā kā ar pirmo gājienu no kaudzes izņēma 2 monētas, ar katru nākošo – vismaz vienu un monētu kopējais skaits kaudzē samazinājās par 20–2=18, tad netika izdarīti vairāk kā 17 gājieni.

12.1. Ievērosim, ka $x^2+x+4=(x-1)(x+2)+6$. Ja x^2+x+4 dalās ar 9, tad tas dalās arī ar 3. Tāpēc $(x-1)(x+2)$ dalās ar 3. Tāpēc vai nu $x-1$, vai $x+2$ dalās ar 3; bet $(x+2)-(x-1)=3$, tāpēc **abi** reizinātāji $x-1$ un $x+2$ dalās ar 3. Tāpēc $(x-1)(x+2)$ dalās ar 9. Bet tad $(x-1)(x+2)+6$ ar 9 nedalās – pretruna.

12.2. No dotā seko, ka AC ir ap sfēru apvilktas lodes diametrs, t.i., visgarākā horda. No tā seko vajadzīgais.

12.3. Saskaņā ar nevienādību starp nenegatīvu skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko $a^6+5b^6=a^6+b^6+b^6+b^6+b^6+b^6\geq 6\cdot\sqrt[6]{a^6\cdot b^6\cdot b^6\cdot b^6\cdot b^6\cdot b^6}=6ab^5$, k.b.j.

12.4. Tā kā $\angle \mathrm{ABC}=45°$, tad $\Delta \mathrm{BA_1A}$ ir vienādsānu un A_1 atrodas uz AB vidusperpendikula. Līdzīgi C_1 atrodas uz BC vidusperpendikula.



18. zīm.

Tāpēc O (skat. zīm.) ir $\Delta\mathrm{ABC}$ apvilktās riņķa līnijas centrs. Tā kā $\mathrm{C_1OA_1H}$ ir paralelograms (pretējās malas pa pāriem paralēlas) un paralelograma diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm, vajadzīgais pierādīts.

12.5. Nē, jo „+1" skaits uz 2007-stūra ar katru gājienu mainās par 2 vai arī nemainās vispār.