Valsts matemātikas olimpiādes 1. posma uzdevumi

5. klase

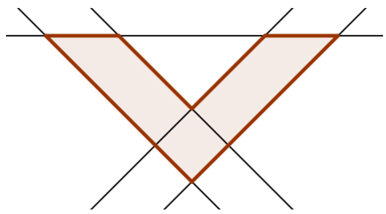
5.1. Atrast naturālu skaitli, kura ciparu summa dalās ar 27, bet pats ar 27 nedalās.

5.2. Parādi vienu piemēru, kā rūtiņu burtnīcas lapā nokrāsot dažas rūtiņas melnā krāsā tā, lai katrai melnai rūtiņai būtu vismaz četras melnas blakus rūtiņas! Divas rūtiņas sauksim par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala vai kopīga virsotne.

5.3. Zināms, ka katrs klases skolēns nodarbojas ar vismaz vienu no trim aktivitātēm: dejo tautas dejas, dzied korī vai sporto. Ir tikai viens skolēns, kas gan dejo, gan dzied, gan sporto. No visiem klases skolēniem 12 dejo tautas dejas, 11 skolēni dzied korī, 15 skolēni sporto. Ir 3 skolēni, kas gan dejo, gan dzied. Ir 4 skolēni, kas gan dzied, gan sporto. Ir 5 skolēni, kas gan dejo, gan sporto. Cik skolēnu ir klasē?

6. klase

6.1. Uzzīmē divpadsmitstūri, kura visas malas novietotas uz 6 taisnēm! Piemēram, 1. att. dotajam sešstūrim visas 6 malas ir novietotas uz 5 taisnēm. Ievēro, ka no katras divpadsmitstūra virsotnes drīkst *iziet* tieši divas malas!



1. att.

6.2. Sniedzei ir 54 piparkūkas un 10 dāvanu maisiņi. Vai viņa var salikt piparkūkas šajos maisiņos tā, lai katrā maisiņā būtu vismaz viena piparkūka un nekādos divos maisiņos nebūtu vienāds piparkūku skaits?

6.3. Vai naturāla skaitļa ciparu reizinājums var būt 6930?

7. klase

7.1. Skaitļa n pierakstā izmantoti tikai cipari 1 un 2. Vieninieku ir 7 reizes vairāk nekā divnieku. Pierādīt, ka $n + 2017$ nedalās ar 3.

7.2. Ekskursijā piedalījās 15 skolēni. Visiem kopā līdzi bija ne mazāk kā 122 eiro. Turklāt katram skolēnam bija vesels skaits eiro. Pierādīt, ka vismaz vienam skolēnam līdzi bija ne mazāk kā 9 eiro!

7.3. Vai var uzzīmēt sešas taisnes tā, lai tām būtu tieši **a)** 6 krustpunkti, **b)** 16 krustpunkti?

8. klase

8.1. Atrast mazāko naturālo skaitli, kura ciparu reizinājums ir 210 un kas dalās ar 9.

8.2. Ekskursijā piedalījās 15 skolēni. Visiem kopā līdzi bija ne mazāk kā 122 eiro. Turklāt centu monētas bija tikai diviem skolēniem; visiem pārējiem bija tikai eiro monētas vai papīra nauda. Pierādīt, ka vismaz vienam skolēnam līdzi bija ne mazāk kā 9 eiro.

8.3. Trijstūrī ABC no virsotnēm novilkti nogriežņi AM, BN un CK, kas krustojas vienā punktā O. Punkti K, M, N atrodas attiecīgi uz trijstūra malām AB, BC, AC. Pierādīt, ka $AM + BN + CK > \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$.

9. klase

9.1. a) Vai noteikti visiem reāliem skaitļiem x izpildās $3x^2 - 0{,}25x + 0{,}005 > 0$?
b) Vai noteikti visiem reāliem skaitļiem x izpildās $9x^2 + 12x + 5 > 0$?

9.2. Ar naturālu skaitli atļauts izdarīt šādas operācijas:
1) pieskaitīt tam 6;
2) dalīt ar 2, ja tas ir pāra skaitlis;
3) mainīt vietām tā ciparus (skaitļa priekšā nedrīkst nonākt nulle).
Par kādu vismazāko skaitli, veicot tikai atļautās operācijas, var pārveidot skaitli **a)** 76; **b)** 15?

9.3. Izliektā četrstūrī $ABCD$ punkts M ir malas BC viduspunkts un punkts N ir malas CD viduspunkts. Pierādīt, ka $S_{AMN} < \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

10. klase

10.1. Pierādīt, ka $a^2 + b^2 + \frac{1}{2} \geq a + b$.

10.2. Trīs no aritmētiskās progresijas locekļiem ir 41; 113; 193. Atrast lielāko iespējamo diferences vērtību, ja zināms, ka diference ir vesels skaitlis!

10.3. Taisnstūra $ABCD$ iekšpusē atlikts punkts P. Pierādīt, ka $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

11. klase

11.1. Pierādīt, ka $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2$.

11.2. No sākuma uz papīra lapas uzrakstīts skaitlis 16. Ja uz lapas uzrakstīts skaitlis x, tad uz tā atļauts uzrakstīt arī skaitli x^2, ja uz lapas uzrakstīti skaitļi x un y, tad uz tās atļauts uzrakstīt arī skaitli $|x - y| + 1$.
Vai var panākt, lai uz lapas būtu uzrakstīts skaitlis 2016 (un varbūt vēl kādi citi skaitļi)?

11.3. Izliektā četrstūrī $ABCD$ diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras. Pierādīt, ka četrstūra malu viduspunkti atrodas uz vienas riņķa līnijas!

12. klase

12.1. Pierādīt, ka $\frac{a+b}{a^2+b^2} \geq \frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}$, ja a un b ir pozitīvi skaitļi.

12.2. Kādu lielāko daudzumu skaitļu var izvēlēties no kopas $\{1; 2; 3; \ldots; 2017\}$ tā, lai starp izvēlētajiem skaitļiem nekādu divu skaitļu summa nebūtu vienāda ar trešo skaitli?

12.3. Dots izliekts četrstūris $ABCD$. Zināms, ka $AC \perp BD$ un $AB = 10$, $BC = 11$, $CD = 12$. Aprēķināt malas AD garumu!