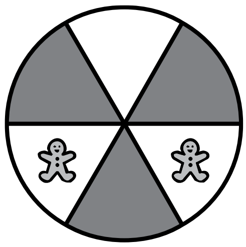
Uzdevumi

5. klase

5.1. Rindā uzrakstīti veselie skaitļi 1, 2, 3, …, 2014, katrs vienu reizi. Cik ciparu uzrakstīts?

5.2. Kvadrāts sastāv no 3×3 vienādām rūtiņām. Vai tās visas var pārsvītrot ar divām taisnēm? (Taisne pārsvītro rūtiņu, ja tā iet caur kādu rūtiņas iekšēju punktu.)

5.3. Uz vecmāmiņas galda uzklāta divu krāsu sedziņa, kas sadalīta sešos laukumos (skat. 1. zīm.). Uz tās atrodas divas piparkūkas. Ieva izdomāja spēlēt tādu spēli: katrā gājienā viņa drīkst divos blakus laukumos palielināt piparkūku skaitu par 1. Vai Ieva var panākt, ka pēc vairākiem gājieniem visos laukumos būs vienāds skaits piparkūku?



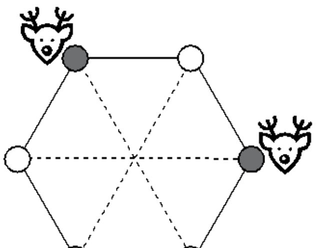
1. zīm.

6. klase

6.1. a) Vai var atrast tādu skaitli, kas dalot ar 11, dod atlikumu 5, bet, dalot ar 13, dod atlikumu 9?
b) Vai var atrast tādu skaitli, kas dalot ar 4, dod atlikumu 1, bet, dalot ar 8, dod atlikumu 2?

6.2. Vai var uzzīmēt plaknē 7 starus tā, lai katrs no tiem krustotu tieši divus citus?

6.3. Elfi spēlējas ar ziemeļbriežiem. Pie staļļa ir seši mieti, pie diviem no tiem piesieti ziemeļbrieži (skat. 2. zīm.). Ar vienu gājienu drīkst piesiet pa ziemeļbriedim pie jebkura mieta, kas savienoti ar nogriezni. Vai elfi var panākt, ka pēc vairākiem gājieniem pie visiem mietiem būtu piesiets vienāds skaits ziemeļbriežu?



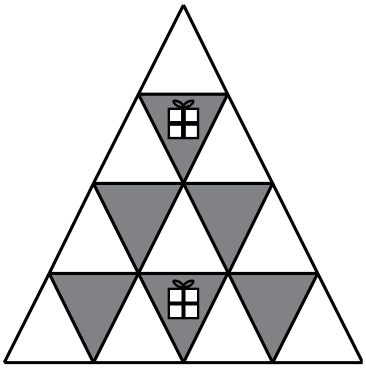
2. zīm.

7. klase

7.1. Apskatām 10 dažādus skaitļus un visas to starpības (no lielākā skaitļa atņem mazāko). Kāds ir mazākais dažādo starpību skaits, kāds var izveidoties?

7.2. Vai var uzzīmēt trīs nogriežņus tā, lai tiem visiem būtu dažāds krustpunktu skaits ar abiem pārējiem?
Vai tā var uzzīmēt trīs patvaļīgas līnijas?

7.3. Rūķīši uz grīdas ir uzzīmējuši spēļu laukumu un spēlējas ar dāvanām. Sākumā uz laukuma atrodas divas dāvanas (skat. 3. zīm.). Vienā gājienā ir atļauts divos trijstūrīšos, kam ir kopīga mala, pievienot pa vienai dāvanai. Vai rūķīši var panākt, ka pēc vairākiem gājieniem visos trijstūrīšos būs novietots vienāds skaits dāvanu?

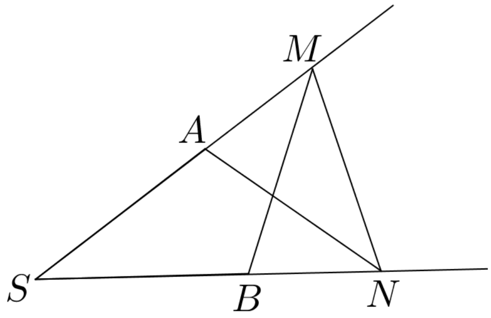


3. zīm.

8. klase

8.1. Cik ir tādu funkciju, kurām definīcijas kopa sastāv no četriem elementiem: 0, 1, 2, 4, bet vērtību kopa sastāv no diviem elementiem: 0, 1 ?

8.2. Dots, ka $SA = SB = AN = BM = MN$ (skat. 4. zīm.). Aprēķināt $\angle ASB$.

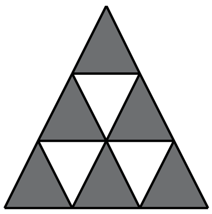


4. zīm.

8.3. Katrā no mazajiem trijstūrīšiem (skat. 5. zīm.) ierakstīts viencipara naturāls skaitlis; dažādos trijstūrīšos ierakstīti dažādi skaitļi. Aplūkojam visas tādas divu skaitļu summas, kuri ierakstīti trijstūrīšos ar kopīgu malu.

a) Vai var būt, ka neviena no šīm summām nepārsniedz 10?

b) Kāds mazākais skaits no šīm summām var būt pāra skaitļi?



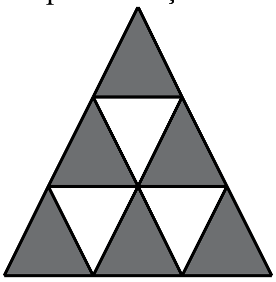
5. zīm.

9. klase

9.1. Turnīrā piedalās 10 komandas, katrai ar katru jāizspēlē viena spēle. Vai var gadīties tāds brīdis, kad visas komandas izspēlējušas dažādu spēļu skaitu?

9.2. Šaurleņķu trijstūrī ABC augstums no virsotnes A, leņķa B bisektrise un malas AB vidusperpendikuls krustojas vienā punktā. Aprēķināt $\angle ABC$.

9.3. Katrā mazajā trijstūrītī (skat. 6. zīm.) ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 9 (visi skaitļi dažādi). Katriem diviem trijstūrīšiem ar kopīgu malu aprēķina tajos ierakstīto skaitļu summu. Kāds lielākais skaits no šīm summām var būt pirmskaitļi?



6. zīm.

10. klase

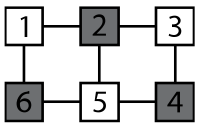
10.1. Dots, ka x un y naturāli skaitļi. Kāds ir mazākais skaits dažādu pirmskaitļu, ar kuriem var dalīties izteiksme

$$3x(x+2y+1)(7y+1)\,?$$

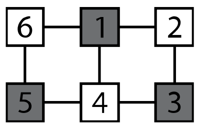
10.2. Uz kvadrāta $ABCD$ diagonāles AC atlikts punkts M. Pierādīt, ka

$$MA\cdot MC+MB\cdot MD=AB^2\,.$$

10.3. Kvadrātos ir ierakstīti skaitļi 1, 2, 3, 4, 5, 6 (skat. 7. zīm.). Vienā gājienā ir atļauts izvēlēties jebkurus divus skaitļus, kurus savieno nogrieznis, un pie katra no tiem pieskaitīt vienu un to pašu veselu skaitli (šis skaitlis katrā gājienā var būt cits). Vai, veicot šādus gājienus, varēs iegūt 8. zīm. parādīto skaitļu izvietojumu?



7. zīm.



8. zīm.

11. klase

11.1. Šaha turnīrā piedalās 9 spēlētāji, kuri katrs ar katru spēlē tieši vienu reizi. Katrā spēlē uzvarētājs saņem vienu punktu, zaudētājs – 0 punktus, bet par neizšķirtu katrs spēlētājs saņem $\frac{1}{2}$ punkta. Turnīra beigās katrs spēlētājs bija saņēmis vienādu punktu skaitu.

- **a)** Vai ir iespējams, ka katrs spēlētājs nospēlēja neizšķirti atšķirīgu skaitu reižu?
- **b)** Vai ir iespējams, ka katram spēlētājam ir atšķirīgs zaudējumu skaits?

11.2. Izliektam četrstūrim novilktas visu astoņu ārējo leņķu bisektrises. Pierādīt, ka tās veido četrstūri, kuram var apvilkt riņķa līniju.

11.3. Tabulas 3×3 rūtiņās ierakstītas nulles. Vienā gājienā atļauts dotajā tabulā izvēlēties kvadrātu ar izmēriem 2×2 rūtiņas un palielināt par 1 visus tajā ierakstītos skaitļus. Pierādīt, ka pēc vairākiem šādiem gājieniem nevarēs iegūt 9. zīm. doto tabulu.

4	9	5
10	18	12
6	13	7

9. zīm.

12. klase

12.1. Deviņciparu naturāla skaitļa n ciparu summa ir 3. Kāda var būt n^3 ciparu summa?

12.2. Trapeces diagonāles ir vienādas. Pierādīt, ka ap šo trapeci var apvilkt riņķa līniju.

12.3. Deviņi rūķīši izvietoti kvadrātā ar izmēriem 3×3 rūtiņas, kas atrodas šaha galdiņa, 8×8 rūtiņas kreisajā apakšējā stūrī. Katrs rūķītis var pārlēkt pāri tam rūķītim, kas atrodas blakus, ja tur ir brīvs laucinš. Lēkt var gan vertikāli, gan horizontāli, gan arī pa diagonāli.
Vai var pārvietot rūķīšus citā kvadrātā ar izmēriem 3×3 rūtiņas, kas atrodas šaha galdiņa

- **a)** kreisajā augšējā stūrī;
- **b)** labajā augšējā stūrī?