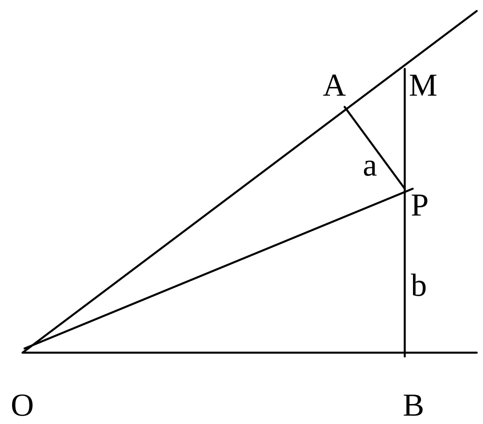
Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 27. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

27.1. No dotā $x^0 \cdot x^2 \cdot \ldots \cdot x^{2n} = x^{n(n+1)} = 64$ un $x^1 \cdot x^3 \cdot \ldots \cdot x^{2n-1} = x^{n^2} = 32$. Izdalot pirmo reizinājumu ar otro, iegūstam $x^n = 2$. No vienādības $\left(x^n\right)^{n+1} = 64$ seko, ka n = 5 un $x = \sqrt[5]{2}$.

27.2.



27.1.zīm.

Pagarinām *PB* līdz punktam *M*. Tad $\angle APM = \angle AOB = \alpha$ (kā leņķi ar savstarpēji perpendikulārām malām). Tātad

$$MP = \frac{a}{\cos\alpha},\ MB = b + \frac{a}{\cos\alpha},\ OB = MB\operatorname{ctg}\alpha = b\operatorname{ctg}\alpha + \frac{a}{\sin\alpha},$$

$$OP = \sqrt{OB^2 + PB^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 2ab\cos\alpha + b^2}}{\sin\alpha}.$$

27.3. Izmantojot to, ka riņķa līnija (izņemot punktus *A* un *B*) ir to punktu kopa, no kuriem diametru *AB* redz taisnā leņķī, kā arī to, ka nogrieznis, kas savieno riņķa līnijas centru ar hordas viduspunktu, ir tai perpendikulārs; pierādām, ka visu apskatāmo hordu viduspunkti pieder riņķa līnijai ar diametru *OM*, kur *O* ir dotās riņķa līnijas centrs.

27.4. Ja *AB* = s un tūristu ceļā pavadītie laiki t_1 un t_2, tad $\frac{t_1}{2}v_1 + \frac{t_1}{2}v_2 = s$ un $t_2 - = \frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}$. Tāpēc

$$t_1 - t_2 = \frac{2s}{v_1 + v_2} - \frac{s}{2}\frac{(v_1 + v_2)}{v_1 v_2} = \frac{4sv_1v_2 - s-(v_1 + v_2)^2}{2(v_1 + v_2)v_1v_2} = -\frac{s(v_1 - v_2)^2}{2(v_1 + v_2)v_1v_2} < 0.$$

27.5. Novelkam taisni caur virsotni *A* un *P*. Vienā tās pusē paliek nepāra skaits daudzstūra malu un virsotņu, otrajā pusē -- pāra skaits. Bet vienas puses malas var krustot tikai taisnes, kas iet caur otras puses virsotnēm.

27.6. Ja šo riņķa līniju centrus savieno, tad savienojuma līnijas iet pa dotā četrstūra ārējo leņķu bisektrisēm un rodas jauns četrstūris, kura malas iet caur dotā četrstūra virsotnēm. Ja dotā četrstūra leņķi ir α, β, γ un δ, tad jaunā četrstūra leņķi ir $180° - \left(\frac{180° - \alpha}{2} + \frac{180° - \beta}{2}\right) = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\frac{\beta + \gamma}{2}, \frac{\gamma + \delta}{2}, \frac{\delta + \alpha}{2}$. Tātad pretējo leņķu lielumu summa ir $\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = 180°$, un ap to var apvilkt riņķa līniju.

27.7. Skaitļa 2^n pēdējais cipars periodiski atkārtojas ar periodu (2, 4, 8, 6), bet skaitļa n^2 pēdējais cipars -- ar periodu (1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0). Mazākais kopīgais periods ir ar garumu 20. Aplūkosim pēdējos ciparus šī perioda robežās:
(3, 8, 7, 2, 7, 0, 7, 0, 3, 4, 9, 0, 1, 0, 3, 2, 1, 8, 9, 6). Tātad pēdējais cipars var būt 1, bet nevar būt 5.

27.8. Sareizinot dotās vienādības, iegūstam

$a_{n+1}b_{n+1} = a_n b_n + 2 + \frac{1}{a_n b_n} > a_n b_n + 2$. Tātad

$$a_{50}b_{50} > 2 \cdot 49 + a_1 b_1 + \frac{1}{a_1 b_1} \geq 100.$$

No šejienes iegūstam $a_{50} + b_{50} \geq 2\sqrt{a_{50}b_{50}} > 20$.

27.9. Apzīmēsim $\angle CA_nB_n = \beta_n$. Tad

$$\beta_1 = \alpha, \beta_2 = \alpha + \frac{\beta_1}{4}, \beta_3 = \alpha + \frac{\beta_2}{4}, \ldots, \beta_n = \alpha + \frac{\beta_{n-1}}{4}.$$

Reizinām otro vienādību ar 4^1, trešo ar 4^2, ... , pēdējo ar 4^{n-1} un visas saskaitām.

Iegūstām $4^{n-1}\beta_n = \alpha(1 + 4 + \cdots + 4^{n-1})$ un $\beta_n = \frac{(4^n - 1)\alpha}{3 \cdot 4^{n-1}}$.

No šejienes atrodam prasīto robežu

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n-1}{3\cdot 4^{n-1}}\alpha = \frac{4}{3}\alpha .$$

27.10. Šķēlumā veidojas piecstūris ar laukumu $\frac{7}{16}\sqrt{4b^2d^2+a^2\left(b^2+d^2\right)}$.

27.11. Ja šo riņķa līniju centrus savieno, tad savienojuma līnijas iet pa dotā četrstūra ārējo leņķu bisektrisēm un rodas jauns četrstūris, kura malas iet caur dotā četrstūra virsotnēm. Ja dotā četrstūra leņķi ir α, β, γ un δ, tad jaunā četrstūra leņķi ir $180°-\left(\frac{180°-\alpha}{2}+\frac{180°-\beta}{2}\right)=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\beta+\gamma}{2}, \frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{\delta+\alpha}{2}$. Tātad pretējo leņķu lielumu summa ir $\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}=180°$, un ap to var apvilkt riņķa līniju.

27.12. Apzīmējot $2^{x^2+4x}=y$, iegūstam, ka $0<y^2+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}<\frac{9}{2}$. Tā kā $y > 0$, tad jābūt, ka $\frac{1}{2}<y<2$ jeb $-1<x^2+4x<1$, no kurienes iegūstam atbildi.

Atbilde: $x\in\left(-2-\sqrt{5},-2-\sqrt{3}\right)\cup\left(-2+\sqrt{3},-2+\sqrt{5}\right)$.

27.13. . Skaitļa 2^n pēdējais cipars periodiski atkārtojas ar periodu (2, 4, 8, 6), bet skaitļa n^2 pēdējais cipars -- ar periodu (1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0). Mazākais kopīgais periods ir ar garumu 20. Aplūkosim pēdējos ciparus šī perioda robežās:
(3, 8, 7, 2, 7, 0, 7, 0, 3, 4, 9, 0, 1, 0, 3, 2, 1, 8, 9, 6). Tātad pēdējais cipars var būt 1, bet nevar būt 5.

27.14. Apzīmējam meklējamo skaitli ar $\overline{a_1a_2\ldots a_{100}}$. Iegūstam vienādību $\overline{a_1a_2\ldots a_{100}}=\left(a_1+\cdots a_{100}\right)+\left(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{99}a_{100}\right)+\cdots+a_1a_2\cdots a_{100}$ jeb $\overline{a_1a_2\cdots a_{100}}=\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)\cdots\left(1+a_{100}\right)-1$.

Ar indukciju pierādīsim, ka $\overline{a_1a_2\cdots a_n}\geq\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)\cdots\left(1+a_n\right)-1$ un vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $a_2=\cdots=a_n=9$.

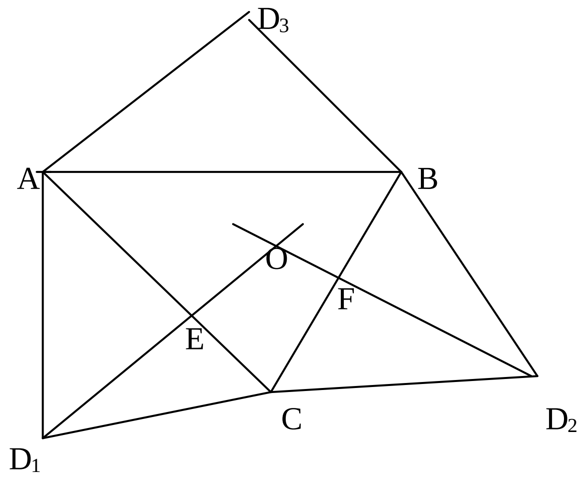
Ja $n = 1$, tad tas ir acīmredzams. Pieņemsim, ka tas pierādīts, ja $n=k$. Tad

$$\overline{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}=10\cdot\overline{a_1a_2\cdots a_k}+a_{k+1}\geq$$
$$\left(1+a_{k+1}\right)\cdot\overline{a_1a_2\cdots a_k}+a_{k+1}\geq\left(1+a_{k+1}\right)\left[\left(1+a_1\right)\cdots\left(1+a_k\right)-1\right]+a_{k+1}=$$
$$\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)\cdots\left(1+a_{k+1}\right)-1$$

un vienādība pastāv tad un tikai tad, kad $a_2=\cdots=a_k=a_{k+1}=9$. Ar matemātisko indukciju apgalvojums pierādīts. Tātad mūsu meklējamie skaitļi ir šādi: $a99\ldots9$, kur a ir jebkurš cipars, kas nav 0.

27.15. Šķēlumā veidojas piecstūris ar laukumu $\frac{7}{16}\sqrt{4b^2d^2+a^2\left(b^2+d^2\right)}$.

27.16. No 3 perpendikulu teorēmas izriet, ka piramīdas augstuma pamata projekcijas uz pamata malām ir sānu skaldņu augstumu pamati. Tāpēc, ja mēs konstruēsim piramīdas izklājumu un novilksim perpendikulus no D_1 un D_2 pret AC un BC, tad to krustpunkts O būs piramīdas augstuma pamats (skat. 27.2. zīm.).



27.2. zīm.

Tad DO var konstruēt kā kateti taisnleņķa trijstūrim , kura hipotenūza ir D_2F , bet katete ir OF.

27.17. a) Izmantojot formulas, vienādojumu pārveidojam formā:

$3\sin x - 4\sin^3 x + 1 - 2\sin^2 x = 1 + 2\sin x\left(1 - 2\sin^2 x\right)$

Atrisinot dabū, ka $\sin x \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$; $x = \pi n(n \in Z), x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n(n \in Z)$.

b) Apzīmējam sin x = y un iegūstam vienādojumu

$3y - 4y^3 = ay + \left(4 - 2|a|\right)y^2$.

Viens tā atrisinājums ir $y = 0$; paliek kvadrātvienādojums $4y^2 + \left(4 - 2|a|\right)y + a - 3 = 0$. Ja abi vienādojumi ekvivalenti, tad viens tā atrisinājums ir $\frac{1}{2}$; ievietojot dabū $a = |a|, \quad a \geq 0$. No Vjeta teorēmas seko, ka otra sakne ir $\frac{a-3}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{a-3}{2}$. Vienādojumi būs ekvivalenti, ja tā būs $0, \frac{1}{2}$ vai arī pēc moduļa lielāka par 1.

Atbilde: $a \in [0, 1) \cup \{3\} \cup \{4\} \cup (5, \infty)$.

27.18. Tā kā $2^{F_n} - 2 = 2^{2^{2^n}+1} - 2 = 2\left(2^{2^{2^n}} - 1\right)$ un $\left(2^{2^n} + 1\right)\left(2^{2^n} - 1\right) = 2^{2^{n+1}} - 1$, tad pietiek pierādīt, ka $2^{2^{2^n}} - 1$ dalās ar $2^{2^{n+1}} - 1$. Tā kā $a^{kb} - 1$ dalās ar $a^b - 1$, tad pietiek pierādīt, ka 2^{2^n} dalās ar 2^{n+1}. Tas seko no nevienādības $2^n \geq n+1$, ko pierāda ar matemātisko indukciju.

27.19. Atsvaru kopējais svars ir $\frac{n(n+1)}{2}$.Tātad vai nu *n* vai *n* + 1 jādalās ar 3.

Ja n = 2 vai n = 3, prasība nav izpildāma.

Ja n = 5 vai n = 6, tad atsvarus var salikt šādi:
$(1,4), (2,3),\ 5$ vai $(1,6), (2,5), (3,4)$.

Ja *n* atsvari jau salikti, tad arī *n* + 3 atsvarus var salikt. Atsvaru *n* + 3 kg novieto tajā kaudzē, kurā ir 1 kg, atsvarus 1 kg un *n* + 1 kg novieto otrajā kaudzē, bet atsvaru *n* + 2 kg -- trešajā kaudzē. Tātad *n* atsvarus var salikt tad un tikai tad, ja *n* ≥ 5 un vai nu *n*, vai nu *n* + 1 dalās ar 3.

27.20. Vispirms pierāda, ka no jauna iezīmētie kustīgās riņķa līnijas punkti paši jaunus punktus neiezīmē, bet vienmēr nonāk pretī tiem punktiem, kurus iezīmējis pirmais iezīmētais kustīgās riņķa līnijas punkts. Kad kustīgā riņķa līnija 100 reizes apripojusi nekustīgo, tās noklātais ceļš uz nekustīgās riņķa līnijas ir $100\sqrt{2} = 141{,}4\ldots$. Tātad no jauna šajā laikā iezīmēti 141 nekustīgās riņķa līnijas punkts, bet kopā -- 142.

27.21. Pieņemsim, ka vienādojumam eksistē atrisinājums naturālos skaitļos (*x*, *y*). Tad

$$x^2 + x - 4y(y+1) = 0, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16y+16y^2}}{2}.$$

Tā kā *x* ir naturāls skaitlis, tad ir $16y^2 + 16y + 1$ ir jābūt naturāla skaitļa kvadrātam, bet tas nav iespējams, jo šis skaitlis atrodas starp diviem sekojošiem naturālu skaitļu kvadrātiem: $(4y+1)^2 < 16y^2 + 16y + 1 < (4y+2)^2$.

27.22. Pieņemsim, ka šāda riņķa līnija eksistē. Tad tā dala uz pusēm arī katra sākotnējā riņķa laukumu. Tāpēc tai ir jāsatur iekšpusē arī taisnes nogriezni, kas savieno sākotnējo riņķa līniju centrus. Bet, tā kā šis nogrieznis dala abu sākotnējo riņķu šķēlumu vienlielās daļās, tad trešā riņķa līnija šo šķēlumu nedala vienlielās daļās (tās iekšpusē atrodas lielāka daļa.

27.23. Apzīmējam ar *M* vislielāko no uzrakstītajiem skaitļiem (ja tādu ir vairāki, tad vienu no tiem), bet tam pulksteņa rādītāja kustības virzienā sekojošos skaitļus -- ar *x* un *y*. Tad $M = |x - y|$. Tā kā $0 \leq x, y \leq M$, tad vai nu $x = 0, y = M$, vai arī $x = M, y = 0$. Abos gadījumos iegūstam, ka uzrakstītie skaitļi ir $M,\ M, 0, M, M, 0, \ldots, M, M, 0$. Tā kā visu skaitļu summa ir 1, tad $M = \frac{1}{20}$.

27.24. Maksimālais attālums ir 1 m.

a) Parādīsim ka var gadīties, ka gliemezis nolien 1 m. 10 novērotāji novēros gliemezi šādos laika intervālos:
$[0;\ 1], [0{,}6;\ 1{,}6], [1{,}2;\ 2{,}2], [1{,}7;\ 2{,}7], [2{,}4;\ 3{,}4], [2{,}8;\ 3{,}8], [3{,}6;\ 4{,}6], [3{,}9;\ 4{,}9], [4{,}8;\ 5{,}8], [5;\ 6]$

Ja laikā kad gliemezi novēro viens novērotājs (tādu periodu ir 10) gliemezis norāpo 10 cm, bet pārējā laikā nekustas, tad viņš norāpos 1 m.

b) *Lemma.* No novērotājiem var izvēlēties dažus tā, ka

1) visu laika periodu kāds no novērotājiem novēro gliemezi,

2) nevienā brīdī gliemezi nenovēro vairāk par 2 novērotājiem.

Pierādījumā izmanto to, ka ja kādā laika momentā gliemezi novēro vairāk par 2 novērotājiem, tad var dažus no novērotājiem izmest, atstājot divus (pirmo un pēdējo no novērotājiem, kas redz doto brīdi).

Sanumurēsim izvēlētos novērotājus atbilstoši laikam, kad tie sāk novērot gliemezi. Tā kā nevienā no laika momentiem gliemezi nenovēro 3 cilvēki, tad laika brīži novērotājiem ar nepāra (pāra) numuriem nepārklājas. Tā kā kopējais laiks ir 6 minūtes, tad ir ne vairāk kā 5 novērotāji ar nepāra numuriem un ne vairāk kā 5 novērotāji ar pāra numuriem, t. i. kopā 10. Tā kā katra novērotāja laika sprīdī gliemezis nolien 10 cm, tad kopējais gliemeža veiktais attālums nepārsniedz 1 m.

27.25. Šaha galdiņa lauciņus apzīmēsim ar pāriem (i, j), $1 \le i, j \le 1000$. Sākumā karalis aiziet uz lauciņu (2, 2). Ja 1. horizontālē vai vertikālē atrodas kāds tornis, tad melnais karalis ar nākošo gājienu uzvar. Tāpēc aplūkosim gadījumu, kad visi torņi atrodas augstāk un pa labi no karaļa. Tad karalis pa diagonāli dodas uz lauciņu (999, 999). Tas izpilda 997 gājienus. Pa šo laiku visiem torņiem jāpārvietojas pa kreisi un zemāk no karaļa, tātad jāizdara 2×499 = 998 gājieni, bet tam nepietiek laika.

27.26. Uz katras kakta šķautnes novietosim vienības vektoru ar sākumu kakta virsotnē. Apzīmēsim tos ar $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Tad vektori $\bar{a}+\bar{b}, \bar{b}+\bar{c}, \bar{c}+\bar{a}$ ies pa kakta plakano leņķu bisektrisēm. Atradīsim kosinusus leņķiem starp bisektrisēm:

$$\cos\alpha_1 = \frac{(\bar{a}+\bar{b})(\bar{b}+\bar{c})}{|\bar{a}+\bar{b}|\,|\bar{b}+\bar{c}|} = \frac{1+\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}}{|\bar{a}+\bar{b}|\,|\bar{b}+\bar{c}|},$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}+\bar{c})}{|\bar{a}+\bar{b}|\,|\bar{a}+\bar{c}|} = \frac{1+\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}}{|\bar{a}+\bar{b}|\,|\bar{a}+\bar{c}|},$$

$$\cos\alpha_3 = \frac{(\bar{a}+\bar{c})(\bar{b}+\bar{c})}{|\bar{a}+\bar{c}|\,|\bar{b}+\bar{c}|} = \frac{1+\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}}{|\bar{a}+\bar{c}|\,|\bar{b}+\bar{c}|}.$$

Izmantojām to, ka $\overline{a}a = \overline{b}b = \overline{c}c = 1$. Redzam, ka visi kosinusi vienlaicīgi ir vai nu negatīvi, vai 0, vai pozitīvi.

27.27. *Lemma.* Ja *P*(x) ir polinoms ar veseliem koeficientiem, tad visiem veseliem skaitļiem *a* un *b* *P*(*b*) - *P*(*a*) dalās ar *b* - *a*.
Pierādījums seko no tā, ka $b^n - a^n$ dalās ar *b* - *a*.
Pieņemsim, ka x_0 ir vienādojuma *P*(*x*) = 0 vesela sakne. Tad
$1 = P(a) - P(x_0) = P(b) - P(x_0) = P(c) - P(x_0)$ dalās ar $a - x_0, b - x_0, c - x_0$. Bet skaitlis 1 nevar dalīties ar trim dažādiem skaitļiem.

27.28. Izvēlamies vienu cilvēku *A*. Starp atlikušajiem 23 cilvēkiem ir vai nu vismaz 12 tādi, ar kuriem *A* ir pazīstams, vai vismaz 12 tādi, ar kuriem *A* nav pazīstams. Uzskatīsim, ka *A* ir pazīstams ar 12 cilvēkiem.
Izvēlamies starp šiem cilvēkiem kādu cilvēku *B*. Starp atlikušajiem ir vai nu vismaz 6 tādi, ar kuriem *B* ir pazīstams, vai arī nu vismaz 6 tādi, ar kuriem *B* nav pazīstams.

1. Starp atlikušajiem 11 ir vismaz 6 tādi, ar kuriem *B* ir pazīstams. Ja starp šiem 6 ir divi, kas savstarpēji pazīstami, tad tie kopā ar *A* un *B* veido meklējamo 4 cilvēku grupu, kurā visi pazīst viens otru. Ja tādu divu nav, tad mums ir 6 cilvēki, kas cits citu nepazīst.

2. Starp atlikušajiem 11 ir vismaz 6 tādi, ar kuriem *B* nav pazīstams. Turpmāk aplūkosim tikai šos 6 cilvēkus. Izvēlēsimies vienu no tiem -- *C*.

2.1. Starp atlikušajiem pieciem ir 3 tādi, ar kuriem *C* ir pazīstams. Ja starp šiem 3 kaut divi ir savstarpēji pazīstami, tad viņi kopā ar *C* un *A* veido prasīto četrinieku; ja tādu divu cilvēku nav, tad šie trīs kopā ar *B* veido četrinieku, kurā neviens nepazīst otru.

2.2. Starp atlikušajiem pieciem ir 3 tādi, ar kuriem *C* nav pazīstams. Ja starp šiem 3 ir kaut divi, kas viens otru nepazīst, tad viņi kopā ar *B* un *C* veido prasīto grupu. Ja visi 3 viens otru pazīst, tad viņi kopā ar *A* veido grupu, kurā katrs pazīst katru.

27.29. $1 = 1^2$, $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$, $3 = -1^2 + 2^2$, $4 = -1^2 - 2^2 + 3^2$.
No vienādības
$$A + 4 = A + (n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2$$

izriet, ka, ja skaitli A var izteikt prasītajā veidā, tad arī skaitli $A + 4$ var izteikt prasītajā veidā. Ar matemātisko indukciju pierādīts, ka katru naturālu skaitli var izteikt prasītajā veidā.

Pieskaitot un atņemot četrinieku katram skaitlim var atrast bezgalīgi daudzas prasītā veida izteiksmes.

27.30. Pieņemsim, ka virkne ir ierobežota. Tā kā virkne ir monotoni augoša, tad tai eksistē robeža *c*. Dotajā vienādība, pārejot uz robežu pie $n \to \infty$, iegūstam

$$c = \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{1}{c}},$$

no kurienes $\frac{1}{c} = 0$, kas nav iespējams. Tātad virkne nav ierobežota.

Kāpinot doto vienādību kubā, pakāpeniski iegūstam

$$a_{n+1}^3 = \frac{a_n^3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{a_n}{2}\sqrt{1+\frac{4}{a_n^3}}\left(a_n^2 + \frac{1}{a_n}\right) < \frac{a_n^3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{a_n}{2}\left(1+\frac{2}{a_n^3}\right)\left(a_n^2 + \frac{1}{a_n}\right) =$$

$$a_n^3 + 3 + \frac{1}{a_n^3} \le a_n^3 + 4$$

No šejienes iegūstam, ka $a_{250}^3 \le 1 + 4 \cdot 249$. Tātad $a_{250} \le \sqrt[3]{997} < 10$.

27.31. Pieņemsim, ka šķīvīši kaut kā sadalīti starp skolēniem. Ja katram jau tikusi kaut kāda viņa atnestā konfekte, tad viss kārtībā. Pretējā gadījumā ir tāds skolēns A_1, kurš saņēmis šķīvīti bez savām konfektēm.

Var pierādīt, ka tāda gadījumā var atrast tādus skolēnus A_2, A_3, ... ,A_n, ka uz A_2 šķīvīša ir A_1 atnestā konfekte, uz A_3 šķīvīša ir A_2 atnestā konfekte, ... , uz A_n šķīvīša ir A_{n-1} atnestā konfekte, uz A_1 šķīvīša ir A_n atnestā konfekte. Izdarot maiņas pa ciklu, visiem skolēniem A_1, A_2, ... ,A_n būs šķīvīši ar viņu atnestajām konfektēm.

Tā kā katru reizi pēc šādas operācijas skolēnu skaits, kas saņēmuši savu konfekti palielinās, tad pēc galīga soļu skaita visiem skolēniem uz šķīvīša tiks sava konfekte.

27.32. Ņemot *x* vērtības 1, -1, 0, $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$ iegūstam nevienādības

(1) $|a+b+c+d+e| \le 1$,

(2) $|a-b+c-d+e| \le 1$,

(3) $|e| \le 1$,

(4) $\left|\frac{a}{4} + \frac{b}{2\sqrt{2}} + \frac{c}{2} + \frac{d}{\sqrt{2}} + e\right| \le 1$,

(5) $\left|\frac{a}{4}-\frac{b}{2\sqrt{2}}+\frac{c}{2}-\frac{d}{\sqrt{2}}+e\right|\le 1,$

No (1) un (2) izriet, ka

(6) $2|a+c+e|\le|a+b+c+d+e|+|a-b+c-d+e|\le 2,$

Līdzīgi no (4) un (5) izriet, ka

(7) $\left|\frac{a}{2}+c+2e\right|\le 2.$

No (6) un (7) izriet, ka

(8) $\left|\frac{a}{2}-e\right|\le 3.$

No (8) un (3) izriet, ka $\left|\frac{a}{2}\right|=\left|\frac{a}{2}-e+e\right|\le\left|\frac{a}{2}-e\right|+|e|\le 4$, jeb $|a|\le 8$.

Vienīgais polinoms, kuram izpildās uzdevuma nosacījumi un a = 8 ir $8x^4-8x^2+1$.

27.33. Pieņemsim, ka virkne ir ierobežota. Tā kā virkne ir monotoni augoša, tad tai eksistē robeža *c*. Dotajā vienādība, pārejot uz robežu pie $n\to\infty$, iegūstam

$$c=\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{1}{c}},$$

no kurienes $\frac{1}{c}=0$, kas nav iespējams. Tātad virkne nav ierobežota.

Kāpinot doto vienādību kubā, pakāpeniski iegūstam

$$a_{n+1}^3=\frac{a_n^3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{a_n}{2}\sqrt{1+\frac{4}{a_n^3}}\left(a_n^2+\frac{1}{a_n}\right)<\frac{a_n^3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{a_n}{2}\left(1+\frac{2}{a_n^3}\right)\left(a_n^2+\frac{1}{a_n}\right)=$$

$$a_n^3+3+\frac{1}{a_n^3}\le a_n^3+4$$

No šejienes iegūstam, ka $a_{250}^3\le 1+4\cdot 249$. Tātad $a_{250}\le\sqrt[3]{997}<10$.

27.34. Tā kā *x* un *x* + 1 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad vai nu *x* vai *x* + 1 dalās ar p^{2n}. Abos gadījumos $x+1\ge p^{2n}$. Pamatsakarību pārveidojam formā

$p^{2n}-1=\left(p^n(2y+1)+(2x+1)\right)\left(p^n(2y+1)-(2x+1)\right)$. Tātad

$p^{2n}-1\ge p^n(2y+1)+(2x+1)>2x+1$.

No šejienes $p^{2n}>2x+2\ge 2p^{2n}$. Iegūta pretruna, kas pierāda, ka dotajam vienādojumam nav atrisinājumu naturālos skaitļos.

27.35. Vienu reizi griežot, kopējais apgabalu skaits palielinās par 1. Pēc *n* griezieniem kopējais apgabalu skaits būs *n* + 1. Ar katru griezienu kopējais virsotņu skaits var pieaugt par 2, 3 vai 4. Tātad pēc *n* griezieniem virsotņu skaits nepārsniedz 4*n* + 4.

Ja pēc *x* griezieniem būs radušies 1000 divdesmitstūru, tad citu apgabalu skaits būs vismaz $3(x-99)+100\cdot 20=3x+1703$. Tātad $3x+1703 \le 4x+4$; $x \ge 1699$.

Parādīsim, ka ar 1699 griezieniem uzdevuma prasību var izpildīt. Vispirms ar 99 griezieniem sagriežam kvadrātu 100 taisnstūros, bet pēc tam katru taisnstūri, 16 reizes nogriežot stūrus, pārveidojam par 20-stūri. Kopējais griezienu skaits ir $99+16\cdot 100=1699$.