Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 27. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

8. klase

27.1. Sareizinot ģeometriskās progresijas 1, x, x^2, x^3, ... , x^{2n} locekļus, kuru kārtas numuri ir nepāra skaitļi, iegūst 64, bet, sareizinot locekļus, kuru kārtas numuri ir pāra skaitļi, iegūst 32. Aprēķināt n un x.

27.2. Starp šaura leņķa α malām dots punkts P, kura attālumi līdz šī leņķa malām ir a un b. Aprēķināt punkta P attālumu līdz leņķa virsotnei.

27.3. No riņķa līnijas punkta M novilktas trīs hordas. Pierādīt, ka šo hordu viduspunkti un punkts M ir tāda četrstūra virsotnes, ap kuru var apvilkt riņķa līniju.

27.4. Divi tūristi dodas no punkta A uz punktu B. Pirmais tūrists pirmajā pusē no visa ceļā pavadītā laika iet ar nemainīgu ātrumu v_1 km/h, bet otrajā pusē -- ar nemainīgu ātrumu v_2 km/h. Otrais tūrists pirmo pusi ceļa veic ar ātrumu v_2 km/h, bet otro pusi -- ar ātrumu v_1 km/h, $v_1 \neq v_2$. Kurš no tūristiem ceļu no A uz B veic īsākā laikā?

27.5. Izliekta $2k$-stūra iekšpusē ņemts punkts P. Caur katru virsotni un punktu P vilkta taisne. Pierādīt, ka starp $2k$-stūra malām ir vismaz viena tāda, kuru neviena no novilktajām taisnēm nekrusto iekšējā punktā.

9. klase

27.6. Dots izliekts četrstūris. Ārpus tā novilktas četras riņķa līnijas; katra no tām pieskaras vienai četrstūra malai un divu malu pagarinājumiem. Pierādīt, ka šo četru riņķa līniju centri atrodas uz vienas riņķa līnijas.

27.7. Vai skaitļa $2^n + n^2$ (n -- naturāls skaitlis) pēdējais cipars var būt a) 5, b) 1 ?

27.8. Divas skaitļu virknes $a_1, a_2, a_3, \ldots$ un $b_1, b_2, b_3, \ldots$ tiek veidotas šādi: $a_1 > 0, b_1 > 0$, un visiem n =1, 2, 3, ...

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n}, \quad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n}.$$

Pierādīt, ka $a_{50} + b_{50} > 20$.

27.9. Dots vienādsānu trijstūris A_1B_1C ($CA_1 = CB_1$) ar leņķi pie pamata α. Velkam leņķa CA_1B_1 bisektrisi A_1B_2, leņķa CB_2A_1 bisektrisi B_2A_2, leņķa CA_2B_2 bisektrisi A_2B_3. utt. Iegūstam leņķu virkni $\angle CA_1B_1$, $\angle CA_2B_2$, $\angle CA_3B_3$, ... Pierādīt, ka šo leņķu lielumu virkne konverģē, un atrast $\lim\limits_{n\to\infty} \angle CA_nB_n$.

27.10. Taisnstūra paralēlskaldnī $ABCDA_1B_1C_1D_1$ šķautņu AA_1, AB un AD garumi ir attiecīgi a, b un d. O ir skaldnes $ABCD$ diagonāļu krustpunkts, O_1 -- skaldnes $A_1B_1C_1D_1$ diagonāļu krustpunkts. Punkts E dala nogriezni OO_1 attiecībā 3 : 1. Caur punktu E novilkta plakne, kas šķeļ paralēlskaldni un ir paralēla nogriežņiem AC_1 un BD. Aprēķināt šķēluma laukumu.

10. klase

27.11. Skat. 27.6. uzdevumu.

27.12. Atrisināt nevienādību

$$\log_{\frac{9}{2}}\left(4^{x^2+4x} + 2^{x^2+4x-1} - \tfrac{1}{2}\right) < 1.$$

27.13. Skat. 27.7. a) uzdevumu.

27.14. Simtciparu skaitlis vienāds ar savu ciparu summu plus visu iespējamo savu ciparu pāru reizinājumu summu plus visu iespējamo savu ciparu trijnieku reizinājumu summu plus ... plus visu savu ciparu reizinājumu. Atrast visus šādus skaitļus.

27.15. Skat. 27.10. uzdevumu.

11. klase

27.16. Plaknē doti seši nogriežņi, kas vienādi ar piramīdas *ABCD* šķautnēm (ir zināms, kurš nogrieznis ar kuru šķautni ir vienāds). Izmantojot cirkuli un lineālu, konstruēt plaknē nogriezni, kas vienāds ar piramīdas augstumu pret skaldni *ABC*.

27.17. Doti trigonometriskie vienādojumi

$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2 \sin x \cos x$,
$\sin 3x = a \sin x + (4 - 2|a|)\sin^2 x$.

Atrisināt pirmo vienādojumu un noteikt, kādām parametra *a* vērtībām abu vienādojumu atrisinājumu kopas sakrīt.

27.18. $F_n = 2^{2^n} + 1$, kur n = 1, 2, 3, ... Pierādīt, ka katram naturālam *n* skaitlis $2F_n - 2$ dalās ar F_n.

27.19. Jūsu rīcībā ir *n* dažādi atsvari, to svars ir 1 kg, 2 kg, 3 kg, ... , n kg. Atsvari jāsakārto trijās pēc svara vienādās kaudzēs. Vai to var izdarīt, ja a) n = 1977; b) n = 1978?

27.20. Riņķa līnija, kuras garums ir 1, bez slīdēšanas ripo pa ārpusi riņķa līnijai, kuras garums ir $\sqrt{2}$. Kustības sākumā abu riņķa līniju saskarsmes punkts ir nokrāsots. Kustības laikā jau nokrāsotie punkti nokrāso tos tīros punktus, ar kuriem tie saskaras. Cik nekustīgās riņķa līnijas punkti būs nokrāsoti brīdī, kad kustīgā riņķa līnija būs 100 reizes apriņķojusi ap nekustīgo?

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

8. un 9. klases

27.21. Atrisināt vienādojumu $x(x+1) = 4y(y+1)$ naturālos skaitļos.

27.22. Divas riņķa līnijas krustojas. Izveidojas trīs ierobežoti plaknes apgabali. Pierādīt, ka neeksistē trešā riņķa līnija, kas katru no šiem trim apgabaliem sadala divās daļās ar vienādiem laukumiem.

27.23. Pa apli uzrakstīti 30 nenegatīvi skaitļi, kuru summa ir 1. Katrs skaitlis vienāds ar to divu skaitļu starpības absolūto vērtību, kuri seko aiz šī skaitļa pulksteņa rādītāja virzienā. Atrast uzrakstītos skaitļus.

27.24. Gliemezis pārvietojas ar mainīgu ātrumu. Sešu minūšu laikā to novēroja vairāki cilvēki, turklāt nevienu brīdi gliemezis nepalika bez uzraudzības. Bija brīži, kad gliemezi vienlaikus novēroja vairāki novērotāji. Katrs cilvēks novēroja gliemezi tieši vienu minūti un konstatēja, ka šīs minūtes laikā gliemezis pārvietojies tieši par 10 cm. Kāds ir lielākais attālums, ko šajās sešās minūtēs varēja veikt gliemezis?

27.25 Dots šaha galdiņš ar 1000×1000 rūtiņām. Uz tā atrodas melnais karalis un 499 baltie torņi. Baltie un melnie izdara gājienus pēc kārtas. Pierādīt, ka neatkarīgi no sākotnējā figūru novietojuma un balto gājieniem melno karalis var nostāties pa sitienam kādam no torņiem.

10. klase

27.26. Trijplakņu kaktā novilktas visu trīs plakano leņķu bisektrises. Pierādīt, ka leņķi starp tām vai nu visi ir šauri, vai visi taisni, vai visi plati.

27.27. $P(x)$ ir polinoms ar veseliem koeficientiem; a, b un c -- dažādi veseli skaitļi. Dots, ka $P(a) = P(b) = P(c) = 1$. Pierādīt, ka vienādojumam $P(x) = 0$ nav atrisinājumu veselos skaitļos.

27.28. Pierādīt, ka starp jebkuriem 24 cilvēkiem var atrast vai nu 4 tādus, kas visi savā starpā pazīstami, vai arī 4 tādus, starp kuriem pat divi nav savā starpā pazīstami.

27.29. Pierādīt, ka katru naturālu skaitli x var bezgalīgi daudz veidos izsacīt formā

$$x = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \cdots \pm n^2,$$

kur n, kā arī plus un mīnus zīmes kvadrātu priekšā izvēlas atkarībā no x.

27.30. Skaitļu virkni a_1, a_2, a_3, ... veido šādi:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \sqrt{\frac{a_n^{\,2}}{4} + \frac{1}{a_n}}, \text{ ja } n \geq 1.$$

Pierādīt, ka a) šī virkne nav ierobežota, b) $a_{250} < 10$.

11. klase

27.31. Uz viesībām atnāca *m* skolēni un katrs atnesa 10 konfektes. Tās kaut kā salika uz *m* šķīvīšiem pa 10 konfektēm uz katra. Pierādīt, ka šķīvīšus skolēniem var izdalīt tā, lai katram tiktu vismaz viena viņa atvestā konfekte.

27.32. Polinoms $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ir ar šādu īpašību: ja $|x| \le 1$, tad $|P(x)| \le 1$. Pierādīt, ka $|a| \le 8$.

27.33. Skat. 27.30. uzdevumu.

27.34. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x(x+1) = p^{2n} \cdot y(y+1)$, ja *p* -- pirmskaitlis, *n* -- naturāls skaitlis.

27.35. Dots kvadrāts. Kāds ir mazākais taisnu griezienu skaits, kāds jāizdara, lai sagrieztu kvadrātu tādās daļās, starp kurām būtu 100 divdesmitstūru? Ar vienu griezienu nevar griezt vairākus gabalus.