Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 29. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

29.1. Abas saknes būs pozitīvas tad un tikai tad, ja

a) tās būs divas (tātad $a \neq 0$),
b) kvadrātvienādojuma diskriminants būs nenegatīvs (t.i., $(a+2)^2 - 4a(a+1) \geq 0$),
c) gan sakņu summa, gan reizinājums būs pozitīvi, t.i. pēc Vjeta teorēmas $-\frac{a+2}{a} > 0$ un $\frac{a+1}{a} > 0$.

Risinot sistēmu

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ (a+2)^2 - 4a(a+1) \geq 0 \\ \frac{a+2}{a} < 0 \\ \frac{a+1}{a} > 0 \end{cases},$$

no 3. un 4. nevienādības iegūstam $-2 < a < -1$, no 2. nevienādības iegūstam $-\frac{2}{\sqrt{3}} \leq a \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Tātad uzdevuma atbilde ir $-\frac{2}{\sqrt{3}} \leq a < -1$.

29.2. Nē, nevar. Apzīmēsim trijstūri ar *ABC*. Pieņemsim no pretējā, ka tāds punkts *M* eksistē; tad tas atrodas uz vienas malas (pieņemsim, *AC*) vidusperpendikula, tātad ir trijstūra augstuma *BD* punkts. Tā kā $AD < AM = 1$ un $BD > BM = 2$, tad $\frac{BD}{AD} > \frac{2}{1} = 2$. Bet $\frac{BD}{AD} = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3} < 2$. Iegūtā pretruna atrisina uzdevumu.

29.3. Tā kā $\angle BAC + \angle BCA = 180° - \angle ABC = 120°$ tad
$\angle OAC + \angle OCA = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle BCA = 60°$ un
$\angle AOC = 180° - (\angle OAC + \angle OCA) = 120°$.

Tātad $\angle NBM + \angle NOM = 60° + 120° = 180°$, un ap četrstūri *NBMO* var apvilkt riņķa līniju. Leņķi $\angle NBO$ un $\angle MBO$ ir šajā riņķa līnijā ievilkti vienādi leņķi (*BO* ir leņķa

$\angle ABC$ bisektrise), tātad tie balstās uz vienādiem lokiem; bet vienādi loki savelk vienādas hordas, kas arī bija jāpierāda.

29.4. Tā kā $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 1001$, tad 1001 dalās ar visu skaitļu a_1, a_2, ... , a_{10} kopīgo dalītāju. Tā kā $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, tad apskatāmo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs nevar pieņemt citas vērtības kā 1, 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001. Vērtības 143 un 1001 neder, jo tad katrs skaitlis būtu ne mazāks par 143 un to summa būtu lielāka par 1001. Atlikušajām 6 vērtībām var norādīt atbilstošos piemērus:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 992; d = 1;

7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 938; d = 7;

11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 902; d = 11;

13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 884; d = 13;

77, 77, 77, 77, 77, 77, 77, 77, 77, 308; d = 77;

91, 91, 91, 91, 91, 91, 91, 91, 91, 182; d = 91.

29.5. Aplūkosim kvadrātu, kura centrā atrodas rūtiņa ar skaitli 1, bet izmēri ir $(2n-1)\times(2n-1)$ rūtiņas. Skaidrs, ka šāda kvadrāta labajā apakšējā stūrī ierakstīts skaitlis $(2n-1)^2$. Blakus šī kvadrāta labējās vertikālās malas vidējai rūtiņai esošajā rūtiņā ierakstīts skaitlis $a_{n+1} = (2n-1)^2 + n$. Aizstājot n ar $n-1$, iegūstam

$$a_n = (2n-3)^2 + (n-1) = 4n^2 - 11n + 8.$$

29.6. Dalot pirmo vienādojumu ar otro, iegūstam $x = 4y$. Ievietojot pirmajā vienādojumā, iegūstam $17y^2 \cdot 4y = 68, \quad y^3 = 1, \quad y = 1, \quad x = 4$.

Pārbaude rāda, ka šis atrisinājums der.

29.7. Vienādojumu risina atsevišķi intervālos $x \le 0, \quad 0 < x \le 2, \quad x > 2$. Vienādojumam atrisinājumu nav.

Otro vienādojumu risina atsevišķi intervālos $x \le 0, \quad 0 < x < 1, \quad x \ge 1$. Tā atrisinājumu kopa ir nogrieznis $[0, 1]$.

29.8. Visi virknes locekļi ir pozitīvi. Apzīmēsim $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$. Tā kā virkne a_n ir augoša, tad

$c > 0$. No sakarības $a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1}$ seko, ka

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + 2\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Pārejot šajā vienādībā uz robežu, iegūstam $c^2 = 1 + 2c, \quad c = 1 + \sqrt{2}$.

29.9. Aplūkosim punktu A_1, A_2, ... ,A_n izliekto apvalku un uzskatīsim, ka A_1 ir viens no apvalka punktiem. Tādā gadījumā visi 2*n* -2 vektori $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \ldots, \overline{A_1A_n}$ un tiem pretējie ir dažādi.

Atliekot uz vienas taisnes vienādos attālumos punktus A_1, A_2, ... ,A_n iegūstam tieši 2*n* - 2 dažādus vektorus $\overline{A_iA_j}$.

29.10. Aplūkosim vispirms regulāru piecstūri. Piecstūra malas garumu apzīmēsim ar *a*, bet laukumu ar *S*. Punkta *M* attālumu līdz piecstūra malām apzīmēsim ar $h_1, h_{2,}, \ldots, h_5$. Savienosim *M* ar piecstūra virsotnēm; piecstūris sadalīsies 5 trijstūros. Tātad

$$S = \tfrac{1}{2}ab_1 + \tfrac{1}{2}ab_2 + \tfrac{1}{2}ab_3 + \tfrac{1}{2}ab_4 + \tfrac{1}{2}ab_5 ,$$

un $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 = \dfrac{2S}{a}$ nav atkarīgs no punkta *M* stāvokļa piecstūra iekšpusē.

Vispārīgo gadījumu pierāda, aplūkojot regulāru piecstūri, kura malas ir paralēlas dotā piecstūra malām un kurš satur doto piecstūri.

29.11. $\cos^2\alpha - \sin^2\beta + \cos^2(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha - \beta) \Leftrightarrow$

$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha - \beta)\cdot\left(2\cos\alpha\ \cos\beta - \cos(\alpha - \beta)\right) \Leftrightarrow$

$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) \Leftrightarrow$

$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \tfrac{1}{2}\left(\cos 2\alpha + \cos 2\beta\right) \Leftrightarrow$

$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \tfrac{1}{2}\left(2\cos^2\alpha - 1 + 1 - 2\sin^2\beta\right) \Leftrightarrow$.

Identitāte pierādīta.

29.12. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x} = 2$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \tfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$.

29.13. Ja OA_1 , OA_2 un OA_3 ir dotā trijplakņu kakta šķautnes, tad visas norādītās plaknes satur taisni, kas atrodas vienādā attālumā no taisnēm OA_1 , OA_2 un OA_3.

29.14. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko, ka

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{100}} = \frac{2}{10}.$$

Vienādība iespējama, ja *a* = 1, *b* = *c* =10, *d* = 100.

29.15. Jā, var. Zīmējumā parādīts, kā to var izdarīt.

			8	**9**			
		8	**6**	**7**	**9**		
	8	**6**	**4**	**5**	**7**	**9**	
8	**6**	**4**	**2**	**3**	**5**	**7**	**9**
7	**5**	**3**	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**
9	**7**	**5**	**3**	**4**	**6**	**8**	**10**
	9	**7**	**5**	**6**	**8**	**10**	
		9	**7**	**8**	**10**		
			9	**10**			

29.2. zīm.

29.16. Doto vienādojumu pārveido formā $\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\sin x + \cos x - 1\right) = 0$.

Atbilde: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}n, \quad x = \dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad n,k \in Z$.

29.17. Apzīmēsim piramīdas šķautņu laukumus ar S_1, S_2, S_3, S_4 bet piramīdas tilpumu ar V. Tad $V = \frac{1}{3}S_1h_1 = \frac{1}{3}S_2h_2 = \frac{1}{3}S_3h_3 = \frac{1}{3}S_4h_4 = \frac{1}{3}r\left(S_1 + S_2 + S_3 + S_4\right)$;

pēdējo vienādību iegūst, sadalot doto piramīdu 4 piramīdās ar kopīgu virsotni ievilktās lodes centrā. Ievietojot izteiksmes $S_1 = \dfrac{3V}{h_1}, S_2 = \dfrac{3V}{h_2}, S_3 = \dfrac{3V}{h_3}, S_4 = \dfrac{3V}{h_4}$

pēdējā vienādībā un saīsinot ar 3 un V, un izdalot ar r , iegūstam vienādību

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}.$$

29.18. $6n + 2 \equiv 2 \pmod 3$, bet x^2 pēc moduļa 3 šādu vērtību nepieņem.

29.19. Apgalvojumus pierāda, aplūkojot funkcijas $y = \dfrac{1}{x}$ grafiku.

29.20. Pierāda apgalvojumu, ka vislētākā sistēma satur vislētāko ceļu. Tālāk sākot no ceļa *BF* pakāpeniski konstruē visu ceļu sistēmu.

29.21. Jāpierāda, ka polinoma $2x^2 + 2x + 1$ vērtības, kur x = 1, 2, 3, ..., n, ..., dalās ar bezgalīgi daudziem pirmskaitļiem.

Pieņemsim no pretējā, ka šīs vērtības dalās tikai ar galīgu daudzumu pirmskaitļu P_1, P_2, P_3, ... , P_n. Aplūkosim vērtību $x_0 = P_1P_2P_3 \cdots P_n$. Tātad $2x_0^2 + 2x_0 + 1$ nedalās ne ar P_1, ne ar P_2, ne ar P_3, ... ne ar P_n -- visos gadījumos rodas atlikums 1. Bet

$2x_0^2+2x_0+1$ ar vismaz vienu pirmskaitli (varbūt pats ar sevi) noteikti dalās. Tātad $2x_0^2+2x_0+1$ dalās ar kādu citu pirmskaitli, ne ar P_1, P_2, P_3, ... , P_n. Iegūta pretruna.

29.22. Kvadrātā un regulārā piecstūrī visas diagonāles ir kongruentas. Ja pieņemsim, ka arī trijstūrī "visas diagonāles" ir kongruentas (jo tam diagonāļu nemaz nav), tad redzam, ka šādam daudzstūrim var būt 3, 4 vai 5 malas. Pierādīsim, ka vairāk kā 5 malas tādam daudzstūrim nevar būt. Ja daudzstūrim ir vismaz sešas virsotnes, tad ņemsim divas secīgas virsotnes *A* un *B*, un divas tām pretējas *E* un *F*, tā ka diagonāles *AE* un *BF* krustojas. Divu diagonāļu *AE* un *BF* summa ir lielāka par četrstūra *AEFB* malu *AE* un *BF* summu. Tātad visi šie nogriežņi nevar būt vienādi.

29.23. Apzīmēsim $A=x_1+x_3+x_5+\cdots$ un $B=x_2+x_4\cdots$, tad

$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n \le A\cdot B \le \left(\frac{A+B}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. Šī vērtība ir iespējama, ņemot

$x_1=x_2=\frac{1}{2},\quad x_3=x_4=\cdots=x_n=0$.

29.24. Pierādīsim, ka *X* var garantēt, lai $S_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{4}$, un nevar garantēt lielāku $S_{A_1B_1C_1}$ vērtību.

1) Izvēloties A_1 malas *BC* viduspunktā un C_1 malas *AB* viduspunktā, *X* garantē, ka $S_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{4}$.

2) Ja *Y* izvēlas B_1 uz malas *AC* tā, ka $A_1B_1 \parallel AB$, tad neatkarīgi no C_1 izvēles $S_{A_1B_1C_1}\le\frac{1}{4}$.

29.25. Apzīmēsim zēnu skaitu klasē ar *Z*, zēnu skaitu pārgājienos attiecīgi ar Z_1, Z_2, Z_3, atbilstošos meiteņu skaitus attiecīgi ar *M*, M_1, M_2, M_3. Tad $Z_1\le M_1\le M$, $Z_2\le\frac{M_2}{2}\le\frac{M}{2}$, $Z_3\le\frac{M_3}{3}\le\frac{M}{3}$. Saskaitot $Z_1+Z_2+Z_3 \le \frac{11}{6}M$. Tā kā katrs skolēns piedalījās vismaz vienā pārgājienā, tad $Z\le\frac{11}{6}M=\frac{11}{6}(34-Z)$. Atrisinot nevienādību iegūstam, ka $Z\le 22$.

22 zēni var būt gadījumā, ja katrā pārgājienā piedalījās visas 12 meitenes, bet $Z_1=12$, $Z_2=6$, $Z_3=4$ un katrs zēns piedalās tieši vienā pārgājienā.

29.26. Pierakstīsim doto vienādību kā $\frac{\sin nx}{\sin x}=Q_{n-1}(\cos x)$. Acīmredzot, Q_{n-1} koeficientu summa ir $Q_{n-1}(1)=\lim\limits_{x\to 0}Q_{n-1}(\cos x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin nx}{\sin x}=n\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin nx}{nx}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=n$.

29.27. Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka katram k eksistē tāds n_k, ka n_k^2+1 dalās ar 5^k.

Ja $k = 1$, $n_1 = 2$, jo $2^2 + 1 \vdots 5$

Skaitli n_{k+1} meklēsim formā $n_k + l\,5^k$

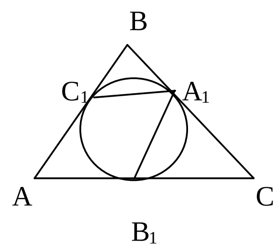
$$\left(n_k + l\cdot 5^k\right)^2 + 1 = n_k^2 + 2ln_k 5^k + l^2 5^{2k} + 1 \equiv M + 2ln_k 5^k \equiv 0\left(\operatorname{mod} 5^{k+1}\right) \Leftrightarrow 5^k m + 2ln_k 5^k$$

$$\equiv 0\left(\operatorname{mod} 5^{k+1}\right) \Leftrightarrow m + 2ln_k \equiv 0(\operatorname{mod} 5) \Leftrightarrow l \equiv -\frac{m}{2n_k}(\operatorname{mod} 5).$$ Šeit $M = n_k^2 + 1$.

29.28. Ja f nav nepārtraukta funkcija, to nevar apgalvot. Kā kontrpiemēru var aplūkot funkciju, kas vienāda ar 1 punktos $x = a + b\sqrt{2}$, a un b -- racionāli skaitļi; bet pārējos punktos funkcijas vērtība ir 0. Šīs funkcijas periodi ir skaitļi 1 un $\sqrt{2}$, kuru attiecība nav racionāls skaitlis.

Atrisinājuma ideja nepārtrauktai funkcijai seko no tā, ka jebkuriem skaitļiem a un b, kuru attiecība ir iracionāls skaitlis, var atrast veselus skaitļus u un v, ka izteiksmes $ua + vb$ vērtība ir patvaļīgi maza.

29.29. Apzīmēsim ΔABC iekšējo leņķu lielumus ar A, B, C un $\Delta A_1B_1C_1$ iekšējo leņķu lielumus ar A_1, B_1, C_1 utt.



29.3. zīm.

Tad $\angle BC_1A_1 = \angle BA_1C_1 = \dfrac{180°-\angle B}{2}$, $\angle CA_1B_1 = \angle CB_1A_1 = \dfrac{180°-\angle C}{2}$; tāpēc $\angle A_1 = 180° - \angle BA_1C_1 - \angle CA_1B_1 = 180° - \dfrac{180°-\angle B}{2} - \dfrac{180°-\angle C}{2} = \dfrac{\angle B+\angle C}{2}$. Līdzīgi $B_1 = \dfrac{A+C}{2}$, $C_1 = \dfrac{A+B}{2}$ (leņķa simbolu nerakstīsim).

Sareizinot nevienādības $A_1 = \dfrac{B+C}{2} \geq \sqrt{BC}$, $B_1 = \dfrac{A+C}{2} \geq \sqrt{AC}$, $C_1 = \dfrac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$ iegūstam $A_1B_1C_1 > ABC$, jo vienādība iespējama tikai regulāra trijstūra gadījumā. Līdzīgi iegūstam nevienādību virkni $ABC < A_1B_1C_1 < A_2B_2C_2 < \ldots < A_nB_nC_n \ldots$. Tātad starp aplūkotajiem trijstūriem nav līdzīgu.

29.30. Izvēlēsimies plaknē patvaļīgu punktu *O*, un vektoru $\overline{OX}$ apzīmēsim ar burtu *x*. Uzskatīsim, ka punkti *M*, *N*, *K* ir attiecīgi nogriežņu A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 viduspunkti. Tad

$$m = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2), k = \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2), b_1 = \tfrac{1}{2}(a_1 + c_1), b_2 = \tfrac{1}{2}(a_2 + c_2), n = \tfrac{1}{4}(a_1 + a_2 + c_1 + c_2)$$

No šejienes $\overline{MN} = \overline{NK} = \tfrac{1}{4}(c_1 + c_2 - a_1 - a_2)$, kas arī bija jāpierāda.

29.31. Pieņemsim pretējo, ka intervālā $[-2, 2]$ visur $f'(x) \geq 1 + \left(f(x)\right)^2$. Tad šajā intervālā $\dfrac{f'(x)}{1 + \left(f(x)\right)^2} \geq 1$. Tāpēc $\int_{-2}^{2} \frac{f'(x)}{1+\left(f(x)\right)^2} dx \geq 4$. Bet

$$\int_{-2}^{2} \frac{f'(x)}{1+\left(f(x)\right)^2} dx = \int_{-2}^{2} d\left(\operatorname{arctg} f(x)\right) = \operatorname{arctg} f(2) - \operatorname{arctg} f(-2) < \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi < 4.$$

29.32. Jā, var.

Vispirms atzīmēsim, ka mums pietiek konstruēt punktus, attālumi starp kuriem ir racionāli skaitļi. Jo palielinot šo zīmējumu *n* reizes, kur *n* ir visu attālumu kopsaucējs, iegūsim prasīto konfigurāciju.

Izvēlamies leņķi $\dfrac{\alpha}{2}$ (pietiekoši mazu), kura sinuss un kosinuss ir racionāli. Tādu leņķi var izvēlēties taisnleņķa trijstūrī ar malām 2*n*, $n^2 - 1$, $n^2 + 1$. Uz riņķa līnijas ar rādiusu 1 atliekam 1979 punktus, kurus atdala loki ar doto leņķa lielumu α. Attālums starp šādiem punktiem ir racionāls skaitlis $2\sin\dfrac{m\alpha}{2}$, jo to var izteikt kā polinomu no $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ un $\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

29.33. Aplūkosim skaitļus, kas ir mazāki par n^{1979}. Izsakot tos kā 1979-to pakāpju summas, var izmantot tikai *n* - 1 skaitļus $1^{1979}, 2^{1979}, \ldots, (n-1)^{1979}$. Tātad var sastādīt ne vairāk kā $(n-1)^{1979}$ summas ar 1979 locekļiem. Tā kā $n^{1979} - (n-1)^{1979} \to \infty$, tad bezgalīgi daudz skaitļu prasītajā formā nav izsakāmi.

29.34. Aplūkosim taisnstūri ar *m* × *n* rūtiņām. Pieņemsim, ka katrā rūtiņā ar varbūtību *p* ierakstīts 1, bet ar varbūtību *q* ierakstīts 0. Tad p^m ir varbūtība, ka vienā fiksētā rindiņā visās rūtiņās ierakstīts 1; bet $1 - p^m$ ir varbūtība, ka vienā fiksētā rindiņā ir vismaz viena vērtība 0. Tātad, $\left(1-p^m\right)^n$ ir varbūtība, ka katrā no *n* rindiņām ir vismaz viena 0; bet $\left(1-q^n\right)^m$ ir varbūtība, ka katra kolonā ir vismaz viens 1.

Atliek pierādīt, ka vismaz viens no šiem apgalvojumiem vienmēr izpildās. Pretējā gadījumā būtu rindiņa, kas sastāv tikai no vieniniekiem, un kolona, kas sastāv tikai no nullēm. Kas varētu būt to krustojumā?

29.35. Konstruēsim sfēru, kura pieskaras abiem cilindriem no iekšpuses. Tās tilpums ir $\frac{4}{3}\pi$. Aplūkosim plakni, kas paralēla abu cilindru asīm. Tās šķēlums ar cilindru kopējo daļu ir kvadrāts, kas apvelk riņķi, kas ir konstruētās sfēras šķēlums. Kvadrāta un tai ievilktā riņķa laukumu attiecība ir $4 : \pi$. No Kavaljērī principa seko, ka tā saglabājas arī tilpumiem. Tātad kopējās daļas tilpums ir $\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{16}{3}$.