Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

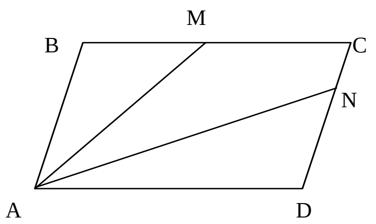
LATVIJAS REPUBLIKAS 30. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

30.1. Vienādojumu pārveidojam formā $\left(x-\sqrt{2x+15}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2x+15}$.

Atbilde: $x =$ 5.

30.2. Tā kā $\angle ABM = \angle AND$ un $\angle BAM = \angle NAD$ pēc dotā, tad trijstūri ABM un ADN ir līdzīgi. Apzīmējot $AB=CD=x,\ \ AD=BC=y$, iegūstam $\frac{BM}{AB}=\frac{ND}{AD}$, jeb $\frac{\frac{y}{2}}{x}=\frac{\frac{2}{3}x}{y}$. No šejienes atrodam prasīto attiecību $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



30.1. zīm.

30.3. Ja diference ir 10, tad pirmie 3 virknes locekļi ir a, a + 10 un a + 20. Viens no tiem dalās ar 3, un tas var būt pirmskaitlis tikai, ja ir vienāds ar 3. Tātad iegūstam progresiju 3, 13, 23.

Otru gadījumu aplūko analoģiski, bet šajā gadījumā prasīto virkni neiegūst, jo 203 nav pirmskaitlis.

30.4. Apzīmēsim $AB=x,\ \ BC=y,\ \ AC=z$. No dotā iegūstam vienādību: $\left(\tfrac{1}{2}x\right)^2+\left(\tfrac{1}{3}y\right)^2=z-3{,}25$. No trijstūra nevienādības izriet, ka $z\le x+y$. Tātad

$$\left(\tfrac{1}{2}x\right)^2+\left(\tfrac{1}{3}y\right)^2+\tfrac{13}{4}\le x+y \quad\Leftrightarrow\quad \left(\tfrac{1}{2}x-1\right)^2+\left(\tfrac{1}{3}y-\tfrac{3}{2}\right)^2\le 0.$$

Abiem kvadrātiem jābūt vienādiem ar 0. Iegūstam $x=2,\ y=\tfrac{9}{2},\ z=\tfrac{13}{2}$.

30.5.

a) Skaitļus var ierakstīt tā, lai visās kolonās ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas (parādiet kā!).

b) Ierakstīt skaitļus tā, lai visās rindiņās ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas nevar. Tiešām, pieņemsim, ka katrā rindiņā ierakstīto skaitļu summa ir *S*.

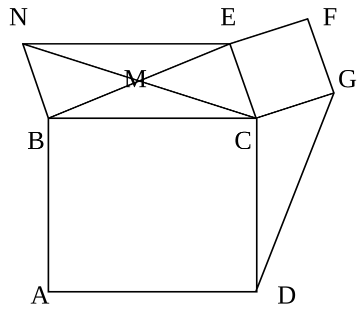
Tad $6S = 1 + 2 + 3 + \cdots 30 = \dfrac{30 \cdot 31}{2} \quad \Leftrightarrow \quad S = \dfrac{5 \cdot 31}{2}$, bet *S* jābūt veselam skaitlim.

30.6. To, ka šādi pārveidojumi ir iespējami parāda katram skaitlim no dotā intervāla. Piemēram, $11 \to 33 \to 165 \to 156 \to 52 \to 25 \to 5$, utt.

30.7. Apzīmēsim $\dfrac{x-2}{x+1} = a$, $\dfrac{x+2}{x-1} = b$. Tad $3a^2 - 4ab + b^2 = 0$. Dalot ar b^2 un risinot kvadrātvienādojumu, iegūstam $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{3}$ vai $\dfrac{a}{b} = 1$. Ievietojot *a* un *b* vietās atbilstošās izteiksmes, iegūstam standarta vienādojumus, kurus atrisinot iegūstam atbildi: $x \in \left\{0; \quad 3 \pm \sqrt{7}\right\}$.

30.8. Atzīmēsim, ka $n^3 - 1 = (n-1) \cdot \left(n^2 + n + 1\right)$ un $n^3 + 1 = (n+1) \cdot \left(n^2 - n + 1\right)$. Ievērojot vienādību $k^2 + k + 1 = (k+1)^2 - (k+1) + 1$ dotajā reizinājumā saīsinās visi locekļi, izņemot pirmos un pēdējos. Iegūstam

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2 + 3n + 3}{n^2 + 3n + 2} = \frac{2}{3}.$$



30.2. zī m.

30.9. Trijstūri *CBE* papildinām līdz paralelogramam *CBNE*. No dotā redzams, ka trijstūri *CBN* un *DCG* ir vienādi (vienādas malas *DC* = *CB*, *CG* = *BN* un leņķi starp tām). Šie trijstūri pagriezti viens pret otru 90° leņķī. Tātad $CM \perp DG$ un *CM* ir divas reizes īsāks par *DG*.

30.10. a) Nē, nevar. Iekrāsosim mazos kubiņus šahveida kārtībā (blakusstāvošie dažādās krāsās). Veidojas 14 melni un 13 balti kubiņi. Lai figūra apietu visus kubiņus tai jāizdara 27 gājieni katru reizi pārejot uz pretējās krāsas kubiņu. Bet tādā gadījumā pēc 27 gājiena tā nevarēs atgriezties sākotnējā kubiņā, jo tā atradīsies pretējās krāsas kubiņā.

b) To var izdarīt.

30.11. Vienādojumu pārveidojam formā:
$\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{\sin 7x}{\cos 7x}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \cos 9x=0;\qquad x=\frac{\pi}{18}\cdot(2n+1),\ n\in Z.$ Taču vērtības $n=9k+4$ neder, jo tad nav definēti sākotnējie tangensi.

30.12. Izpildot pārveidojumus, doto funkciju pārveidojam formā $4\frac{1}{2}-2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2$. Tātad tās lielākā iespējamā vērtība ir $4\frac{1}{2}$, kuru tā pieņem visos punktos, kad $\sin x=\frac{1}{2}$.

30.13. Ja skaitļus *a*, *b*, *c*, *d*, e izvēlēsimies formā 9*k* + 1, tad uzdevuma nosacījumi izpildīsies, jo faktiski tā ir piecu vieninieku summa ar dažādām zīmēm (pēc moduļa 9). Šādus piecus pirmskaitļus var izvēlēties, piemēram, šādi: 19, 37, 73, 109, 127.

30.14. Par punktu kopu plaknē, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, var ņemt, piemēram, regulāra sešstūra virsotņu kopu.

Punktu kopu, kas visa neatrodas vienā plaknē, var iegūt, piemēram, kā divu regulāru sešstūru virsotņu kopu, ja tiem viena galvenā diagonāle ir kopīga, bet plaknes nesakrīt.

30.15. Apzīmēsim kvadrātveida tabulas virsotnes ar *ABCD*, un pieņemsim, ka mums jāvelk lauztas līnijas no *A* uz *C*. Aplūkosim mezglu punktus, kas atrodas uz diagonāles *BD*. Tādu punktu skaits ir *n* + 1. Katra no lauztajām līnijām var saturēt tikai vienu no šiem punktiem. Tātad lauzto līniju skaits ir ne mazāks kā *n* + 1.
Viegli konstruēt piemēru, kad lauzto līniju skaits ir *n* + 1.

30.16. Vienādojumu pārveidojam
$\sin 3x+1=\cos 2x+\sin x \quad\Leftrightarrow\quad 1-\cos 2x=\sin x-\sin 3x \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin^2 x=-2\sin x\cos 2x$

$\Leftrightarrow\quad 2\sin x(\sin x+\cos 2x)=0.$

Atbilde: $x\in\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad -\frac{\pi}{6}+2\pi n,\quad \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right\},\quad n\in Z.$

30.17. Apzīmējot $\log_2 x=y$, iegūstam

$$\frac{y+2}{2}\cdot\frac{y}{2}+\frac{y+1}{y}\cdot\frac{1}{y}+\frac{19}{16}=0.$$

To var pārveidot formā

$$\left(y+\frac{2}{y}\right)^2+2\left(y+\frac{2}{y}\right)+\frac{3}{4}=0.$$

Pastāv divas iespējas : $y+\frac{2}{y}=-\frac{3}{2}$, $y+\frac{2}{y}=-\frac{1}{2}$. Abos gadījumos vienādojumiem nav atrisinājumu.

30.18. Šī telpas daļa sastāv no diviem konusiem, kuru virsotnes atrodas kuba virsotnēs. Tās tilpums ir $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$.

30.19. Pierādīsim, ka ciparu grupa 167 nevar atrasties nekur šādas daļas pierakstā. Pieņemsim no pretējā, ka $\frac{m}{n}=0,a_1a_2\ldots a_k167\ldots$. Tad

$$\frac{10^k\cdot m-n\cdot\overline{a_1a_2\ldots a_k}}{n}=\frac{r}{n}=0{,}167\ldots\ .$$

Tas nozīmē, ka $0{,}167\le\frac{r}{n}\le 0{,}168$.

Pareizinot šo nevienādību ar 6, iegūstam $1{,}002\le\frac{6r}{n}\le 1{,}008$. Tā kā $\frac{6r}{n}\ge 1{,}002$, tad $\frac{6r}{n}>1$, tātad $6r>n$; tā kā n un $6r$ ir veseli skaitļi, tad $6r\ge n+1$ un $\frac{6r}{n}\ge\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}>1{,}01$ (jo $n<100$). Tas ir pretrunā ar to, ka $\frac{6r}{n}<1{,}008$.

30.20. Pieņemsim no pretējā, ka Jānim izdevies aizpildīt daudzstūra iekšējās rūtiņas ar skaitļiem divos dažādos veidos. Atņemsim no vienas tabulas skaitļiem otras tabulas skaitļus (no katras atbilstošās rūtiņas pirmās tabulas skaitļa atņem otrās tabulas skaitli). Iegūsim tabulu, kuras malējās rūtiņās ierakstītas nulles, bet eksistē iekšējā rūtiņa, kurā ir ierakstīts nenulles skaitlis. Uzskatīsim, ka tas ir pozitīvs. Starp visiem tabulas skaitļiem izvēlēsimies vislielāko. Aplūkosim rūtiņu, kurā ierakstīts šis skaitlis a. Tad šai rūtiņai blakusstāvošajās rūtiņās arī visiem skaitļiem jābūt vienādiem ar a. Tiešām, vidējais skaitlis ir blakusstāvošo skaitļu vidējais aritmētiskais, bet tie visi nepārsniedz a, tātad ir vienādi ar a. Tas nozīmē, ka katrai rūtiņai, kurā ierakstīts skaitlis a, blakusstāvošajās rūtiņās arī ierakstīs skaitlis a. Tā kā no jebkuras rūtiņas var aiziet uz jebkuru rūtiņu, vairākas reizes pārejot uz blakusstāvošo, tad visi skaitļi tabulā ir vienādi ar a. Iegūta pretruna, jo tabulas malējās rūtiņās ierakstītas nulles.

30.21. Acīmredzot sistēmai ir atrisinājums pozitīvos skaitļos (1, 1, 1). Pierādīsim, ka cita atrisinājuma pozitīvos skaitļos nav.

Pieņemsim no pretējā, ka tai ir atrisinājums (x, y, z) pozitīvos skaitļos, kas ir atšķirīgs no

(1, 1, 1). Skaidrs, ka kāds no šiem skaitļiem ir lielāks par 1 un kāds – mazāks par 1. Tā kā sistēma ir simetriska attiecībā pret mainīgo x, y, z ciklisku samainīšanu, tad varam pieņemt, ka

$x > 1$.

Apskatīsim vairākus gadījumus (atceroties, ka vai nu $0 < y < 1$, vai $0 < z < 1$).

1. $y \geq 1$, $0 < z < 1$.

Tā kā $x^2 > x$, $y^3 \geq y^2$, $z > z^3$, tad 1. un 3. Vienādojumi ir pretrunīgi.

Līdzīgas pretrunas iegūst arī pārējos gadījumos.

30.22. Funkcijas $ax^2 + bx + c$ vērtības punktos 0, $\frac{1}{2}$, 1 apzīmēsim atbilstoši ar f_1, f_2, f_3. Tad

$$\begin{cases} f_1 = c \\ f_2 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c \\ f_3 = a + b + c \end{cases}$$

Atrisinot sistēmu, iegūstam

$$\begin{cases} a = 2f_1 - 4f_2 + 2f_3 \\ b = -3f_1 + 4f_2 - f_3 \\ c = f_1 \end{cases}$$

Tā kā $|f_k| \leq 1$, tad $|a| \leq 8$, $|b| \leq 8$, $|c| \leq 1$, un izteiksmes $|a| + |b| + |c|$ vērtība nepārsniedz 17. Vērtība 17 realizējas trinomam $8x^2 - 8x + 1$.

30.23. Pierādīsim, ka vismazākās izmaksas, ar kurām tas panākams ir 20000 rubļi.

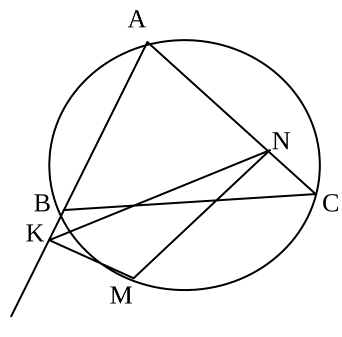
1. Parādīsim, ka ar 20000 rubļiem pietiek.

Strādnieki / Darbagaldi	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*	*	*	*				
2	*	*	*		*			
3	*	*	*			*		
4	*	*	*				*	
5	*	*	*					*

Ja strādnieki apmācīti tā, kā norādīts tabulā, tad kopējās izmaksas ir 20000 rubļu.

2. Pierādīsim, ka ar mazāk kā 20000 rubļiem uzdevuma prasības nav izpildāmas. Tiešām, pieņemsim, ka pietiek ar 19 apmācību procesiem. Tad atradīsies darbagalds, uz kura apmācījušies ne vairāk par 3 strādniekiem. Ja šie trīs strādnieki neierodas darbā, tad uz attiecīgā darbagalda neviens nevarēs strādāt.

30.24.



30.3. zīm

Tā kā $\angle AKM = \angle ANM = 90°$, tad ap četrstūri *AKMN* var apvilkt riņķa līniju ar diametru *AM*. Apzīmēsim tās diametru ar *R*. Apzīmēsim fiksēto leņķi $\angle KAN$ ar α. Tad $KN = 2R\sin\alpha = AM\sin\alpha$, tātad *KN* būs vislielākais tad, kad vislielākais būs *AM*, t.i., kad *A* un *M* būs sākotnējās riņķa līnijas diametrāli pretējie punkti.

30.25. Brīdī, kad būs novilkti visi iespējamie nogriežņi, kvadrāts būs sadalīts trijstūros, kuru virsotnes atradīsies kvadrāta virsotnēs vai dotajos punktos. Pieņemsim, ka ir novilkti x nogriežņi. Katrs no tiem ir divu trijstūru mala. Pieskaitot arī dotā kvadrāta malas, iegūstam, ka kopā trijstūriem ir $2x+4$ malas. To iekšējo leņķu summa ir $\frac{2x+4}{3}\cdot 180°$. No otras puses, visu trijstūru iekšējie leņķi kopā veido 100 pilnus leņķus ar virsotnēm dotajos punktos un 4 kvadrāta leņķus, tātad $360°\cdot 100+360°$. No vienādības $(2x+4)\cdot 60° = 360°\cdot 100+360°$ iegūstam, ka x = 301.

30.26. Starpība starp diviem blakus esošu skaitļu kvadrātiem ir $(n+1)^2-n^2=2n+1$. Tāpēc virknē $0^2, 1^2, \ldots, 990^2$ starpība starp blakus esošajiem locekļiem ir mazāka par 1980. Tas nozīmē, ka virknē $\left[\frac{0^2}{1980}\right], \left[\frac{1^2}{1980}\right], \ldots, \left[\frac{990^2}{1980}\right]$ blakusstāvošie skaitļi ir vai nu vienādi, vai atšķiras par 1. Tā kā pirmais loceklis virknē ir 0, bet pēdējais 495, tad pavisam virknē ir 496 dažādi skaitļi.

30.27. Jā eksistē. Konstruēsim virkni šādi:

1) $a_{k^3}=\frac{1}{k}$,

2) $a_{k^3+1}=a_{k^3+2}=a_{k^3+3}=\cdots=a_{(k+1)^3-1}=-\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{(k+1)^3-k^3}$.

Virknes s_k robeža ir 0, jo otrās grupas locekļi kompensē pirmās grupas locekļus.
Virkne t_k ir neierobežota, jo zināms, ka naturālo skaitļu apgriezto lielumu summa ir neierobežota.

30.28. Nē, neeksistē.

Pieņemsim no pretējā, ka tāds daudzskaldnis eksistē. Aprēķināsim tā visu skaldņu visu leņķu vidējo aritmētisko L.

1) Aplūkosim vienu skaldni. Tā ir n –stūris, kuram $n\geq 6$. Tātad tās leņķu vidējais aritmētiskais
$\frac{180°(n-2)}{n}=180°-\frac{360°}{n}\geq 120°$. Tātad arī lielums L ir ne mazāks par $120°$.

2) Katrā virsotnē saiet vismaz 3 leņķi, kuru summa ir mazāka par $360°$ (jo daudzskaldnis ir izliekts). Tātad katrā virsotnē leņķu vidējais aritmētiskais ir mazāks par $120°$; tātad arī L ir mazāks par $120°$.

Iegūtā pretruna pierāda mūsu apgalvojumu.

30.29. Jāiedomājas, ka mēs konstruējam tetraedra *MNLK* zīmējumu plaknē, kura divas malas *NL* un *MK* atrodas uz dotajām taisnēm, bet pārējās (tās veido četru posmu prasīto līniju) iet caur dotajiem punktiem.

30.30. Aizstāsim katru traipu ar mazāku traipu, kura laukums ir tieši $\frac{1}{2}$. Acīmredzot, uzdevuma apgalvojumu pietiek pierādīt jaunajai traipu sistēmai.
Apzīmēsim tās daļas laukumu, ko pārklāj tieši *n* traipi, ar x_n. Tātad
$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$ (lapas kopējais laukums),
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = \frac{5}{2}$ (traipu kopējais laukums).

Aplūkosim visus iespējamos divu traipu šķēlumus (tādu pavisam ir 10). To laukumu summa ir

$$x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 10_5 \geq -3x_0 - x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 =$$
$$2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5) - 3(x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 2 \cdot \frac{5}{2} - 3 \cdot 1 = 2$$

Ja 10 šķēlumu laukumu summa ir 2, tad vismaz vienam no šiem šķēlumiem laukums ir vismaz $\frac{1}{5}$.
Piemēru, kad visu šķēlumu laukumi ir $\frac{1}{5}$ iegūst šādi. Lapu sadala 20 vienādās daļās. Katrā krāsā iekrāso 10 daļas tā, lai nekādas divas krāsas neatrastos vairāk kā 4 daļās.

30.31. Pieņemsim, ka $x > 1$. Izdalot dotās nevienādības abas puses ar $x - 1$, iegūstam ekvivalentu nevienādību

$$\frac{1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1}}{m} > \frac{1 + x + x^2 + \cdots\ x^{n-1}}{n}$$

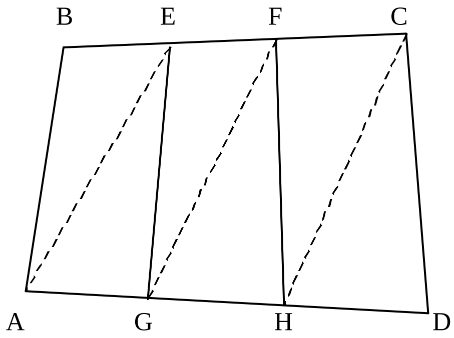
Nevienādības kreisajā pusē ir augošas ģeometriskas progresijas $1, x, x^2, \ldots, x^k$ pirmo *m* locekļu summa, bet otrajā šīs progresijas pirmo *n* locekļu summa. Ja virkne aug, tad palielinās arī tās pirmo locekļu vidējais aritmētiskais.

Gadījumu, kad $0 < x < 1$, apskata analoģiski.

30.32. Uzdevuma atrisinājums seko no divām lemmām.

Lemma. Katrs no novilktajiem nogriežņiem tā krustpunktos ar citiem dalās 3 vienādās daļās.
Pierādījums izmanto smaguma centra jēdzienu.

Lemma. Ja $BE = EF = FG$ un $AG = GH = HD$, tad četrstūra *GEFH* laukums ir viena trešdaļa no četrstūra *ABCD* laukuma.



30.4. zīm.

Pierādījums seko no tā, ka trijstūru *AEG, GFH, HCD* (arī *BAE, EGF, FHC*) laukumi veido aritmētisku progresiju.

30.33. Atzīmēsim bez pierādījuma sekojošu vispārzināmu lemmu.

Lemma. Ja 6 punkti katrs ar katru savienoti ar nogriežņiem, kuri nokrāsoti vienā no divām dotajām krāsām, tad atradīsies 3 punkti, kas savā starpā savienoti ar vienas krāsas nogriežņiem.

Izvēlēsimies patvaļīgas 6 komandas (uzskatīsim tās par punktiem plaknē). Savienosim tās ar zilu nogriezni, ja tās savā starpā abās kārtās nospēlēja vienādi, un ar sarkanu nogriezni pretējā gadījumā. No lemmas seko, ka starp šīm komandām var izvēlēties 3, kas savā starpā savienotas ar vienas krāsas nogriežņiem. Acīmredzot, šīm komandām izpildās uzdevuma prasības.

30.34. Uzdevuma atrisinājums seko no lineāro vienādojumu teorijas .

30.35. Saskaitot visus vienādojumus, iegūstam $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 4xyzt$. Tātad $\frac{|x|^4 + |y|^4 + |z|^4 + |t|^4}{4} = |x| \cdot |y| \cdot |z| \cdot |t|$. No nevienādības par skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko, ka šī vienādība var izpildīties tikai, ja visi skaitļi $|x|, |y|, |z|, |t|$ ir vienādi, bet tad $x^4 - 17 \neq y^4 - 7$. Tātad sistēmai nav atrisinājumu.