Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 30. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

8. klase

30.1. Atrisināt vienādojumu $x^2+2x+15=2x\sqrt{2x+15}$.

30.2. *M* ir paralelograma *ABCD* malas *BC* viduspunkts, bet *N* -- malas *CD* punkts, kas dala *CD* attiecībā *CN* : *ND* = 1 : 2. Dots, ka $\angle BAM = \angle NAD$. Aprēķināt paralelograma *ABCD* malu garumu attiecību.

30.3. Atrast visas aritmētiskās progresijas, kas apmierina šādus nosacījumus:

1) tām ir vismaz 3 locekļi;
2) visi to locekļi ir pirmskaitļi;
3) to diference ir vai nu 10, vai 100.

30.4. Ciemi *A*, *B* un *C* savienoti cits ar citu ar taisniem ceļiem. Blakus ceļam *AC* atrodas taisnstūrveida rudzu lauks, kura garums ir *AC*, bet platums ir 1 km. Blakus ceļam *AB* atrodas kvadrātveida kviešu lauks, kura malas garums ir $\frac{1}{2}AB$, bet blakus ceļam *BC* – kvadrātveida kviešu lauks, kura malas garums ir $\frac{1}{3}BC$. Dots, ka rudzu lauka platība ir par 3,25 km^2 lielāka nekā abu kviešu lauku kopējā platība. Aprēķināt attālumus starp ciematiem *A*, *B* un *C*.

30.5. Taisnstūrveida tabulā ar sešām rindiņām un piecām kolonām jāieraksta visi veselie skaitļi no 1 līdz 30 (katrs skaitlis tieši vienā rūtiņā). Vai to var izdarīt tā, lai

a) visās rindiņās ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas,
b) visās kolonās ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas?

9. klase

30.6. Ar naturālu skaitli atļauts izdarīt šādas operācijas:

a) reizināt ar 2, 3 vai 5;

b) dalīt ar 2, 3 vai 5, ja dalījums ir vesels skaitlis;

c) patvaļīgi mainīt ciparu kārtību (aizliegts pārcelt nulli par pirmo ciparu).

Pierādīt, ka katru naturālu skaitli no intervāla [11; 30] var pārveidot par viencipara skaitli, pakāpeniski izdarot atļautās operācijas. Piemēram, $801 \to 108 \to 54 \to 45 \to 9$.

30.7. Atrisināt vienādojumu

$$3\cdot\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2-4\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1}=0.$$

30.8. Virknes (a_n) vispārīgo locekli nosaka formula

$$a_n=\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\cdot\frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1}.$$

Aprēķināt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

30.9. *ABCD* un *CEFG* ir kvadrāti ar kopīgu virsotni *C*. *M* ir nogriežņa *BE* viduspunkts. Pierādīt, ka nogrieznis *CM* ir perpendikulārs nogrieznim *CD* un divas reizes īsāks par to.

30.10. 27 kubiņi ar izmēriem $1\times1\times1$ salikti tā, ka tie veido kubu ar izmēriem $3\times3\times3$. Vienā no kubiņiem atrodas figūra. Ja figūra atrodas kādā kubiņā *A*, tad ar vienu gājienu tā var pāriet uz jebkuru no kubiņiem, kam ir kopīgas skaldne ar *A*.

1. Vai figūra var pārvietoties tā, lai katrā kubiņā tā nonāktu tieši vienu reizi un ar pēdējo gājienu tā atgrieztos sākotnējā kubiņā?
2. Viens lielā kuba stūra kubiņš ir noņemts. Vai figūra var pārvietoties tā, lai katrā atlikušajā kubiņā tā nonāktu tieši vienu reizi un ar pēdējo gājienu atgrieztos sākotnējā kubiņā?

10.klase

30.11. Atrisināt vienādojumu $\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg}7x=1$.

30.12. Atrast funkcijas $f(x) = 2\sin x + \cos 2x + 3$ lielāko iespējamo vērtību.

30.13. Pierādīt, ka eksistē 5 dažādi pirmskaitļi *a*, *b*, *c*, *d* un *e* ar šādu īpašību: lai kā izvēlētos zīmes izteiksmē $\pm a \pm b \pm c \pm d \pm e$, iegūtais skaitlis nedalās ar 9.

30.14. Jāatrod galīga punktu kopa *M*, kurai piemīt šāda īpašība: katriem diviem dažādiem kopas *M* punktiem *A* un *B* eksistē tādi divi dažādi kopas *M* punkti *C* un *D*, ka $AB \parallel CD$.

1. Uzrādīt tādu kopu *M*, kuras visi punkti pieder pie vienas plaknes, bet ne pie vienas taisnes.
2. Vai var atrast tādu kopu *M*, kuras visi punkti nepieder pie vienas plaknes?

30.15. Kvadrātveida tabulas izmēri ir $n \times n$ rūtiņas. Katras rūtiņas malas garums ir 1. Tiek novilktas lauztas līnijas, kas sākas kreisajā apakšējajā stūrī, iet pa rūtiņu malām un beidzas augšējā labajā stūrī un kuru garums ir 2*n*. Kāds mazākais skaits šādu lauztu līniju jānovelk, lai caur katras rūtiņas virsotni ietu vismaz viena no tām?

11. klase

30.16. Atrisināt vienādojumu $\sin 3x + 1 = \cos 2x + \sin x$.

30.17. Atrisināt vienādojumu $\log_4 4x \cdot \log_4 x + \log_x 2x \cdot \log_x 2 + \dfrac{19}{16} = 0$.

30.18. Kubs, kura šķautnes garums ir 1, rotē ap savu diagonāli (ne ap skaldnes diagonāli). Atrast tās telpas daļas tilpumu, kas kopīga visiem kuba stāvokļiem.

30.19. Dots, ka $m < n < 100$, *m* un *n* – naturāli skaitļi. Pierādīt, ka, pārveidojot $\dfrac{m}{n}$ bezgalīgā periodiska decimāldaļā, tās pirmie trīs cipari aiz komata nevar būt 167. Vai kaut kur šīs daļas pierakstā var atrasties triju pēc kārtas sekojošu ciparu grupa 167?

30.20. Uz rūtiņu lapas uzzīmēts daudzstūris, kura malas iet pa rūtiņu līnijām. Katrā daudzstūra malējā rūtiņā ierakstīts skaitlis. Jānis grib ierakstīt arī katrā daudzstūra iekšējā rūtiņā pa skaitlim tā, lai katrā iekšējā rūtiņā ierakstītais skaitlis būtu četrās blakus esošajās rūtiņās ierakstīto skaitļu vidējais aritmētiskais. (Divas rūtiņas sauc par blakus esošām, ja tām ir kopīga mala.)

Pierādīt, ka Jānis to var izdarīt ne vairāk kā vienā veidā.

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

8. un 9. klases

30.21. Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 3 \\ x^3 + y + z^2 = 3 \\ x^2 + y^3 + z = 3. \end{cases}$$

30.22. Dots, ka *a*, *b* un *c* – reāli skaitļi, un visiem *x* no intervāla [0; 1] pastāv sakarība $|ax^2 + bx + c| \le 1$. Atrast izteiksmes $|a| + |b| + |c|$ lielāko iespējamo vērtību.

30.23. Kādā darbnīcā strādā 8 strādnieki. Katru dienu darbā ierodas tikai 5 no viņiem (kuri – tas iepriekš nav zināms). Darbnīcā ir 5 dažādi darbgaldi. Lai vienu strādnieku apmācītu strādāt pie viena darbgalda, jāpatērē 1000 rubļu.

Kādas ir mazākās apmācības izmaksas, ar kurām var garantēt, ka katru dienu, neatkarīgi no tā, kuri 5 strādnieki ierodas darbā, visus darbgaldus varēs nodarbināt? (Viens strādnieks vienlaikus var strādāt tikai pie viena darbgalda.)

30.24. Ap trijstūri *ABC* apvilkta riņķa līnija ω. No tās punkta *M* vilkti perpendikuli pret taisnēm *AB* un *AC*, to pamatus apzīmēsim ar *K* un *N*.

Kādam punkta *M* stāvoklim uz ω nogriežņa *KN* garums ir maksimālais iespējamais?

30.25. Kvadrāta iekšpusē atrodas 100 punkti tā, ka nekādi 3 no tiem nepieder pie vienas taisnes (un nekādi 2 neatrodas uz vienas taisnes ar kādu kvadrāta virsotni). Sākam savienot atzīmētos punktus savā starpā un ar kvadrāta virsotnēm, novelkot taišņu nogriežņus tā, ka nekādi divi novilktie nogriežņi nekrustojas savā starpā. Savienošanu turpinām tik ilgi, kamēr vien tā iespējama.

Cik nogriežņu izdosies novilkt? Vai novilkto nogriežņu skaits var būt atkarīgs no savienošanas kārtības?

10. klase

30.26. Cik dažādu skaitļu ir galīgā virknē

$$\left[\frac{0^2}{1980}\right], \left[\frac{1^2}{1980}\right], \left[\frac{2^2}{1980}\right], \left[\frac{3^2}{1980}\right], \ldots, \left[\frac{1979^2}{1980}\right], \left[\frac{1980^2}{1980}\right] ?$$

30.27. Ja $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ir skaitļu virkne, tad apzīmēsim $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ un $t_n = a_1 + a_8 + a_{27} + a_{64} + \cdots + a_{n^3}$. Vai eksistē tāda virkne (a_i), ka $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$, bet $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$?

30.28. Vai eksistē tāds izliekts daudzskaldnis, kura katrai skaldnei ir vismaz 6 šķautnes?

30.29. Joslā starp divām paralēlām taisnēm t_1 un t_2 doti četri punkti *A, B, C* un *D*. Izmantojot cirkuli un lineālu, konstruēt slēgtu lauztu līniju ar četriem posmiem, kuras virsotnes pa divām atrodas uz taisnēm t_1 un t_2 , bet katrs posms iet caur citu no punktiem *A*, *B*, *C* un *D*.

30.30. Uz lapas, kuras laukums ir 1, uzkrituši 5 dažādu krāsu traipi. Neviena traipa laukums nav mazāks par $\frac{1}{2}$. Pierādīt, ka starp šiem traipiem var atrast divus tādus, kuru kopējās daļas laukums ir vismaz $\frac{1}{5}$. Vai var garantēt, ka noteikti izdosies atrast divus traipus, kuru kopējās daļas laukums ir lielāks nekā $\frac{1}{5}$?

11. klase

30.31. Dots, ka *m* un *n* naturāli skaitļi, $m > n$, x – pozitīvs skaitlis, kas nav vienāds ar 1. Pierādīt, ka $\frac{x^m - 1}{m} > \frac{x^n - 1}{n}$.

30.32. Katra no izliekta četrstūra malām sadalīta trīs vienādās daļās. Pretējo malu atbilstošie dalījuma punkti savienoti ar nogriežņiem tā, ka četrstūris sadalās deviņos mazos četrstūros. Pierādīt, ka vidēja četrstūra laukums ir $\frac{1}{9}$ no sākotnējā četrstūra laukuma.

30.33. Volejbola turnīrā piedalījās 10 komandas. Tās spēlē divos apļos; katrā aplī katra komanda ar katru spēlē vienu reizi. Neizšķirtu nav.

Pierādīt, ka pēc turnīra nobeiguma var atrast vai nu trīs tādas komandas, kuru visas savstarpējās spēles abos apļos beigušās vienādi (otrajā aplī uzvarējušas tās pašas komandas, kuras pirmajā), vai arī trīs tādas komandas, kuru visas savstarpējās spēles otrajā aplī beigušās pretēji nekā pirmajā aplī (otrajā aplī uzvarējušas tās komandas, kurām pirmajā zaudējušas).

30.34. Rūtiņu lapā uzzīmēts daudzstūris, kura malas iet pa rūtiņu līnijām. Katra daudzstūra malējā rūtiņā ierakstīts skaitlis. Jānis grib ierakstīt arī katrā daudzstūra iekšējā rūtiņā pa skaitlim tā, lai katrā iekšējā rūtiņā ierakstītais skaitlis būtu četrās blakus rūtiņās ierakstīto skaitļu vidējais aritmētiskais. Pierādīt, ka Jānis to var izdarīt.

30.35. Atrisināt vienādojumu sistēmu
$x^4 - 17 = y^4 - 7 = z^4 + 13 = t^4 + 11 = xyzt$.