Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 31. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

31.1 a) Ja $n = 10A + B$, kur B – skaitļa n pēdējais cipars, tātad

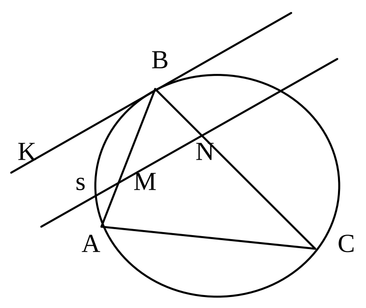
$$\left[\frac{n}{10}\right] = \left[\frac{10A+B}{10}\right] = \left[A + \frac{B}{10}\right] = A \quad \text{un}$$

$$n - 10\left[\frac{n}{10}\right] = (10A+B) - 10A = B$$

ir skaitļa A pēdējais cipars.

a) Skaitļa n priekšpēdējo ciparu izsaka arī šāda izteiksme: $\left[\frac{n - 100\cdot\left[\frac{n}{100}\right]}{10}\right]$. Pierādiet to patstāvīgi!

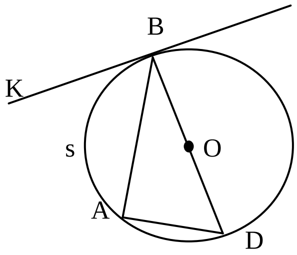
31.2.



31.3. zīm.

Mums jāpierāda, ka $\angle AMN + \angle ACN = 180°$. Tā kā $\angle AMN + \angle BMN = 180°$, tad pietiks pierādīt, ka $\angle ACN = \angle BMN$.

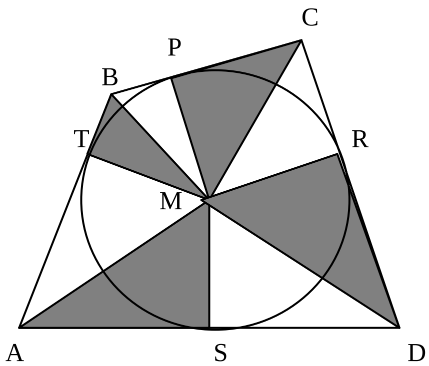
Tā kā $\angle KBA = \angle BMN$ ka iekšējie šķērsleņķi pie divām paralēlām taisnēm, kuras krusto trešā taisne, tad pietiks pierādīt, ka $\angle ACN = \angle KBA$. Tā kā $\angle ACN = \frac{1}{2} \cup AsB$, tad pietiks pierādīt, ka $\angle KBA = \frac{1}{2} \cup AsB$.



31.4. zīm.

Novelkam diametru [BD]. Tad $KB \perp BD$ pēc pieskares īpašības, $BA \perp AD$, jo $\angle BAD$ ir ievilkts leņķis, kas balstās uz diametra. Tāpēc $\angle KBA = \angle BDA$ ka leņķi ar savstarpēji perpendikulārām malām. Bet $\angle BDA = \frac{1}{2} \cup AsB$ pēc ievilkta leņķa īpašības.

31.3.



31.5. zīm.

Apzīmējam $BP = BT = a$, $CP = CR = b$, $DR = DS = c$, $As = AT = d$, bet punkta M attālumus līdz malām AB, BC, CD un DA attiecīgi ar h_1, h_2, h_3, h_4. Tad $S_{TMB} \cdot S_{PMC} \cdot S_{RMD} \cdot S_{SMA} = \frac{1}{2} ah_1 \cdot \frac{1}{2} bh_2 \cdot \frac{1}{2} ch_3 \cdot \frac{1}{2} dh_4 = \frac{1}{16} abcdh_1h_2h_3h_4$, bet $S_{BMP} \cdot S_{CMR} \cdot S_{DMS} \cdot S_{AMT} = \frac{1}{2} ah_2 \cdot \frac{1}{2} bh_3 \cdot \frac{1}{2} ch_4 \cdot \frac{1}{2} dh_1 = \frac{1}{16} abcdh_1h_2h_3h_4$. Redzam, ka abi reizinājumi ir vienādi.

31.4. Nē, nevar.

Pieņemsim pretējo, ka šim vienādojumam ir sakne c. Tad

$$c^2 + ac + b = 0.$$

Bet, no otras puses

$$c^2 + ac + b = c(a + c) + b > 1981(1981 - 1980) - 1980 = 1,$$

jo $c > 1981, a < 1980, b > -1980$; iegūta pretruna, tātad prasītais apgalvojums pierādīts.

31.5. Nē, nevar.

Šajā tabulā ir 5 rindiņas, 5 kolonnas un 2 diagonāles; tātad pavisam izveidojas 12 summas. Šīs summas var pieņemt vērtības no –5 līdz +5 (pavisam 11 vērtības). Tātad vismaz divas summas ir vienādas.

31.6. Pārveidojot, iegūstam

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=0.$$

Līdzīgi iegūstam

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+2})=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+2}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right)=0+0=0.$$

31.7. Nē, nevar būt.

Pirmās laivas stāvokļus dotajos laika momentos apzīmēsim ar A_1, A_2, A_3, bet otrās laivas stāvokļus ar B_1, B_2, B_3 . No vektoru saskaitīšanas likumiem iegūstam

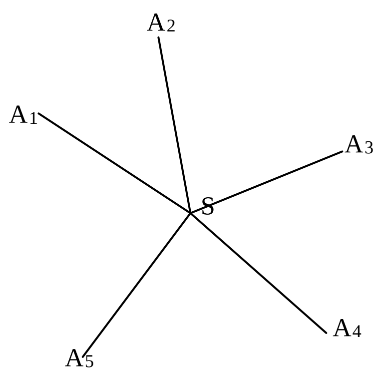
$$2\overline{A_2B_2}=\overline{A_1B_1}+\overline{A_3B_3}.$$

Tātad $80=\left|2\overline{A_2B_2}\right|\le\left|\overline{A_1B_1}\right|+\left|\overline{A_3B_3}\right|=36+37=73$, bet tā ir pretruna.

31.8. To var iegūt, izvēloties zīmes pēc sekojoša likuma

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{2^n}, \text{ ja } a_n<\sqrt{2} \\ a_n-\dfrac{1}{2^n}, \text{ ja } a_n>\sqrt{2}. \end{cases}$$

31.9. Aplūkosim visas 9 piramīdas sānu šķautnes. Vismaz 5 no tām nokrāsotas vienā (teiksim zilā) krāsā (skat 31.6. zīm.).



31.6. zīm.

No šīm 5 šķautnēm vismaz divas (teiksim SA_1 un SA_2) nav piramīdas blakus šķautnes. Tad A_1A_2, A_1A_4 un A_2A_4 ir piramīdas pamata diagonāles. Ja kāda no tām ir zila, veidojas zils trijstūris; ja tās visas ir sarkanas, veidojas sarkans trijstūris.

31.10. Zīmējumu projicējam plaknē paralēli vektoram AA_1. Pierāda, ka M un M_1 ir punktu *A*, *B*, *C* projekciju trijstūra smaguma centrs (mediānu krustpunkts).

31.11. No vienādības $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x = a^2$ iegūstam

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\left(a^2 - 1\right).$$

Tālāk aprēķinām prasītos lielumus.

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) =$$

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = a \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\left(a^2 - 1\right)\right) = \frac{a \cdot \left(3 - a^2\right)}{2}.$$

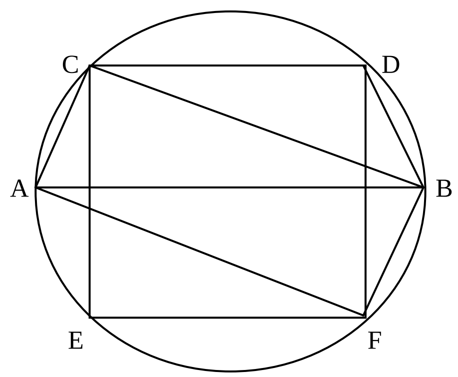
$$\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x =$$

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\left(a^2 - 1\right)\right)^2 = \frac{1 + 2a^2 - a^4}{2}.$$

31.12. Atzīmēsim sekojošu īpašību: punkts pieder divplakņu kakta bisektorai plaknei tad un tikai tad, kad atrodas vienādā attālumā no abām kakta plaknēm.

Aplūkosim dotajā trijstūra piramīdā ievilktās lodes centru *O*. Tas atrodas vienādos attālumos no visām piramīdas skaldnēm, tātad pieder visām 6 bisektorajām plaknēm. Tas nozīmē, ka šīs plaknes krustojas vienā punktā *O*.

31.13. Jā, var. Skat. 31.7. zīm.



31.7.zīm.

ECDF ir kvadrāts; *AB* – diametrs, kas paralēls kvadrāta malai.

Viegli pārbaudīt, ka četrstūri *ACDB* un *ADBF* apmierina uzdevuma nosacījumus (protams, viens no tiem ir jāpārbīda tā, lai četrstūri nekrustotos).

31.14. Ja *A* ir dotais skaitlis un *B* iegūts no *A*, samainot vietām tā ciparus, tad *A* un *B* dod vienādus atlikumus, dalot ar 3. Tātad $A-B$ dalās ar 3; taču 123451 ar 3 nedalās, un šādu starpību iegūt nevar.

31.15. a) Nē, nevar.

Kādā vietā uz riņķa līnijas atradīsies 0; šo vietu ignorēsim, bet pārējos skaitļus pēc kārtas uz riņķa līnijas sagrupēsim pa 3; iegūsim

$$a_1+a_2+a_3\le 14,\quad a_4+a_5+a_6\le 14,\quad a_7+a_8+a_9\le 14.$$

Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam, ka visu doto skaitļu summa nepārsniedz 42, bet šo skaitļu summa ir $1+2+\cdots 9=45$. Iegūta pretruna.

b) To var izdarīt, piemēram, šādi: pa riņķa līniju ierakstām skaitļus šādā secībā:

0, 9, 5, 1, 8, 4, 3, 2, 7, 6.

31.16. Pakāpeniski pārveidojot vienādojumu, iegūstam

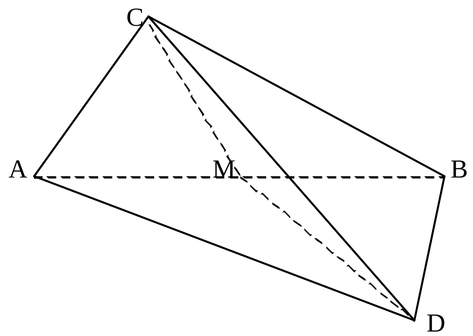
$$\sin^2 x+\sin^2 2x=1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\sin^2 2x=1-\sin^2 x \quad \Leftrightarrow$$
$$\sin^2 2x=\cos^2 x \quad \Leftrightarrow$$
$$4\sin^2 x\cdot\cos^2 x-\cos^2 x=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\cos^2 x\cdot\left(4\sin^2 x-1\right)=0.$$

Atbilde: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z;\quad x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in Z.$

31.16. Nē, neeksistē.

Aplūkosim patvaļīgu piramīdu *ABCD*, kurai

$$AB=CD=10,\quad AC=BD=11,\quad AD=15.$$



31.8. zīm.

Apzīmējam ar M šķautnes AD viduspunktu. Tad $BC < CM + MB$ pēc trijstūra nevienādības. Tā kā trijstūri ACD un ABD ir vienādi, tad $CM = BM$, tāpēc $BC < 2 \cdot CM$.

Papildināsim trijstūri ACD līdz paralelogramam $ACDN$. No sakarības starp paralelograma malām un diagonālēm seko

$CN^2 = 2 \cdot \left(AC^2 + CD^2\right) - AD^2 = 2 \cdot (100 + 121) - 225 = 217 < 225.$

Tāpēc $CN < 15$, un $BC < 2 \cdot CM = CN < 15$.

Tātad tāda piramīda, kāda prasīta uzdevumā, nav iespējama.

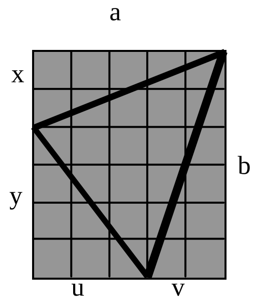
31.19. Izmantosim to, ka katra trijstūra laukums ir izsakāms formā $S = \dfrac{abc}{4R}$, kur a, b, c trijstūra malu garumi, R – apvilktās riņķa līnijas rādiuss.

Pierādāmo nevienādību var pārrakstīt formā $S = \dfrac{abc}{4R} \geq \dfrac{1}{2}$.

Tagad mums ir jāpierāda, ka tāda trijstūra laukums, kura virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs, nav mazāks par $\dfrac{1}{2}$. Tas seko no lemmas.

Lemma. Ja trijstūra virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs, tad trijstūra laukums ir vesels skaitlis dalīts ar 2.

Trijstūri ievietojam mazākajā rūtiņu taisnstūrī, kas to satur. Iespējami dažādi gadījumi; aplūkosim vienu no tiem (skat. 31.8. zīm.).



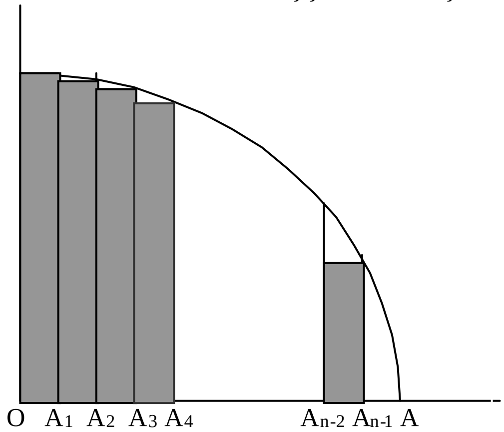
31.8. zīm.

Redzam, ka $S = ab - \dfrac{ax}{2} - \dfrac{yu}{2} - \dfrac{bv}{2}$ ir vesels skaitlis dalīts ar 2. Lemma pierādīta.

Tātad, ja trijstūra virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs, tā laukums ir ne mazāks par $\dfrac{1}{2}$.

31.17. Uzdevums ir viegli risināms, ja atrodas atrast tā ģeometrisko interpretāciju.

Aplūkosim riņķa līniju ar rādiusu n (skat. 31.9. zīm.). Nogriezni OA sadalām n vienības nogriežņos un caur šiem punktiem velkam taisnes perpendikulāri OA; izveidojam n taisnstūrus , kuri atrodas uzzīmētā riņķa ceturtdaļas iekšienē.



31.9. zīm.

Viegli redzēt, ka iesvītroto taisnstūru laukumi ir $\sqrt{n^2-1}, \sqrt{n^2-4}, \ldots \sqrt{n^2-(n-1)^2}$.

To summa ir mazāka par $\frac{\pi n^2}{4}$, no kurienes arī izriet pierādāmā nevienādība.

31.20. a) Pieņemsim, ka virknē ir tikai galīgs skaits locekļu, kas nedalās ar 3. Tad eksistē pēdējais loceklis a_m , kas nedalās ar 3.

Bet tad $a_{m+2} = a_{m+1} + 2^{a_{m+1}}$ nedalās ar 3, jo a_{m+1} dalās ar 3, bet $2^{a_{m+1}}$ nedalās ar 3. Iegūta pretruna, kas pierāda, ka virknē ir bezgalīgi daudz locekļu, kas nedalās ar 3.

b) Aplūkosim divus gadījumus:

1) a_1 ir pāra skaitlis; tad arī visi virknes locekļi ir pāra skaitļi.

Ievērosim, ka $2^{2k} = 4^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 3$. Tātad $a_{m+1} \equiv a_m + 1 \pmod 3$; virknes locekļi pēc kārtas pieņems vērtības 0, 1, 2 pēc moduļa 3; tas nozīmē, ka katrs trešais loceklis dalīsies ar 3.

2) a_1 ir nepāra skaitlis; tad arī visi virknes locekļi ir nepāra skaitļi. Šajā gadījumā $2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k \equiv 2 \cdot 1^k \equiv 2 \pmod 3$, un virknes locekļi pēc moduļa 3 mainīsies šādi: 0, 2, 1, 0, … . Arī šajā gadījumā katrs trešais virknes loceklis dalīsies ar 3.

Apgalvojums pierādīts.

31.21. Apvilksim riņķa līnijas ap trijstūriem AMB un BNC. Tās krustojas punktā B; otru krustpunktu apzīmēsim ar E. Pierādīsim, ka ap trijstūri CKA apvilktā riņķa līnija arī iet caur punktu E. Lai to pierādītu, pierādīsim, ka ap četrstūri $AECK$ var apvilkt riņķa līniju. Tātad jāpierāda, ka $\angle AKC + \angle AEC = 180°$ .Tiešām

$\angle AKC + \angle AEC = (180° - \angle AMB - \angle BNC) + \angle AEC =$
$(180° - (180° - \angle AEB) - (180° - \angle BEC)) + + \angle AEC =$
$\angle AEB + \angle BEC + \angle AEC - 180° = 360° - 180° = 180°$.

31.22. Vispirms pierādīsim, ka divi viens otram sekojoši naturāli skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi. Tiešām $(n, (n+1)) = (n, (n+1) - n) = (n, 1) = 1$.

Sadalīsim visus dotos skaitļus pāros: (1, 2), (3, 4), … , (1999999, 2000000). Tādu pāru ir 1000000. Mums ir jāizvēlas 1000001 skaitlis; tātad vismaz divi skaitļi būs no viena pāra – tie būs savstarpēji pirmskaitļi.

1000000 skaitļus izvēlēties var: jāņem visi pāra skaitļi; jebkuri divi no tiem nav savstarpēji pirmskaitļi, jo tie abi dalās ar 2.

31.23. Nē, to nav iespējams izdarīt.

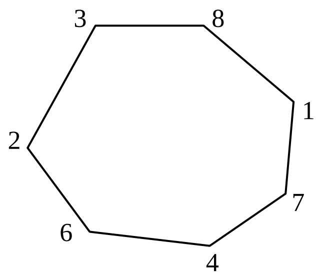
31.24. Acīmredzot, centrus var atzīmēt tā, lai varētu izdarīt $(n-1)\cdot(n-1)$ gājienus (skat. 31.10. zīm.).

*					
*					
*					
*					
*					
*	*	*	*	*	*

31.10. zīm.

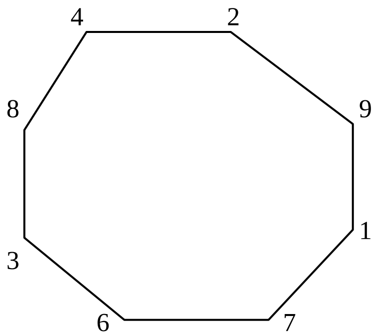
Ar matemātisko indukciju pierāda, ka tabulā ar *n* rindiņām un *m* kolonnām var izdarīt ne vairāk kā $(n-1)\cdot(m-1)$ gājienus.

31.25. a) Var (skat. 31.11. zīm.).



31.11. zīm.

b) Var (skat. 31.12. zīm.).



31.12. zīm.

c) Nevar.

Pieņemsim pretējo, ka skaitļi 9-stūra virsotnēs ierakstīti tā, ka izpildās uzdevuma prasības. Tad

$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_9 - a_1| = 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$; bet

$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_9 - a_1| \equiv (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_9 - a_1) = 0 \pmod 2$.

Tā kā 45 nav pāra skaitlis, tad iegūta pretruna.

31.26. *Lemma.* Ja $u \geq 0, v \geq 0$ un $u < v$, tad ir spēkā nevienādība

$$u \leq \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{2}} \leq v .$$

Pierādījumu iegūstam, kāpinot nevienādības kvadrātā.

Tā kā $b_{n+1} = \sqrt{\dfrac{a_n^2 + b_n^2}{2}}$, tad punkts b_{n+1} atrodas starp punktiem a_n un b_n. Tā kā a_{n+1} ir nogriežņa $[a_n, \ b_n]$ viduspunkts, tad $|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|b_n - a_n|$. No šejienes seko prasītā nevienādība.

31.27. Piramīdas virsotni apzīmēsim ar S, un tās projekciju pamata plaknē ar O. Tā kā visas sānu skaldnes ir vienādas un divplakņu kaktu leņķi pie sānu šķautnēm ir vienādi, tad arī šo skaldņu projekcijas ir vienādi trijstūri (OA_iA_{i+1}). Dots, ka visi nogriežņi A_iA_{i+1} ir vienādi. No trijstūru OA_1A_2 un OA_2A_3 vienādības seko, ka $OA_1 = OA_3$; līdzīgi pierāda, ka $OA_3 = OA_5$, utt. . Iegūstam

$$OA_1 = OA_3 = \cdots = OA_{1981} = OA_0 = OA_2 .$$

Tātad visi nogriežņi OA_i ir vienādi un $A_1A_2 \ldots A_{1981}$ ir regulārs daudzstūris; no šejienes seko, ka piramīda ir regulāra.

Ja aplūkojam 1980-stūra piramīdu, tad tā var nebūt regulāra; vienādiem jābūt tikai nogriežņiem OA_i un OA_j ar vienādām i un j paritātēm.

31.28. 1) $f(1)=2$, $f(ab)=f(a)\cdot f(b)-f(a+b)+1$. Ņemot $b = 1$, iegūstam

$f(a)=2f(a)-f(a+1)+1$;

$f(a+1)=f(a)+1$.

No šejienes seko, ka visiem naturāliem n izpildās vienādība $f(n)=n+1$.

Izmantojot vienādību $f(a)=f(a+1)-1$ viegli pierādīt, ka $f(n)=n+1$ visiem veseliem skaitļiem n.

2) No vienādības $f(a+1)=f(a)+1$ varam iegūt, ka $f(a+n)=f(a)+n$.

Atradīsim $f\left(\frac{1}{n}\right)$:

$f(1)=f\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=f(n)\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(n+\frac{1}{n}\right)+1 \Leftrightarrow$

$2=(n+1)\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)-\left(n+f\left(\frac{1}{n}\right)\right)+1 \Leftrightarrow$

$f\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{n}$,

Tagad aplūkosim patvaļīgu racionālu skaitli $\frac{m}{n}$:

$f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(m\cdot\frac{1}{n}\right)=f(m)\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(m+\frac{1}{n}\right)+1=$

$(m+1)\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)-\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+m\right)+1=m\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)-m+1=$

$m\cdot\frac{n+1}{n}-m+1=\frac{m}{n}+1.$

Tāpēc arī racionāliem skaitļiem izpildās vienādība $f(x)=x+1$.

31.26. Izmantosim matemātisko indukciju.

Ja n = 1, apgalvojums pareizs.

Ja n = 2, izvēlamies zīmes tā, lai leņķis starp vektoriem būtu $\geq 90°$.

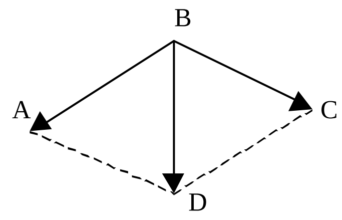
Ja $n \geq 3$, pietiek pierādīt, ka no vektoriem $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ var atrast divus tādus $\vec{b}$ un $\vec{c}$ un izvēlēties zīmes to priekšā, lai $\left|\pm\vec{b} \pm\vec{c}\right| \leq 1$. (*)

(Patiešām, ja šis apgalvojums ir pareizs, tad no k + 1 vektoriem varam atrast divus, kuru summas garums (attiecīgi pieliekot zīmes), nepārsniedz 1, un tātad, aizstājot šos divus vektorus ar to summu, reducēt gadījumu ar k + 1 vektoriem uz gadījumu ar k vektoriem. Tāpēc, ja k vektoriem apgalvojums ir pareizs, tas būs pareizs arī k + 1 vektoram. Līdz ar to būs arī pierādīts visiem n.

Iepriekšminēto apgalvojumu (*) pietiek pierādīt gadījumam ar trim vektoriem, jo pie $k+1 \geq 3$ no k + 1 vektoriem var izvēlēties 3 vektorus. Atliekam visus 3 vektorus no viena punkta un uzzīmējam taisnes, pa kurām tie iet. Varēs tā izvēlēties divas no šīm taisnēm, lai viens no leņķiem α starp tām būtu vismaz 120°. Ņemsim attiecīgos vektorus ar tādām zīmēm, lai tie ietu pa α malām.

Pierādīsim, ka to summas garums nepārsniedz 1.

Pirmkārt, $\angle ADB = \angle DBC$, tātad $\angle ABD + \angle ADB \geq 120°$ un $\angle BAD \leq 60°$. Tātad trijstūrī *ABD* mala *BD* nav mazākā no malām; tā kā $AB \leq 1, \quad AD \leq 1$, tad arī $BD \leq 1$.



31.6. zīm.

31.30. Katriem 4 burtiem a, b, c, d ar $N(abcd)$ apzīmēsim to mazo četrstūrīšu skaitu, kam virsotnes apzīmētas ar burtiem a, b, c, d pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam.

Uzdevums būs atrisināts, ja pierādīsim, ka vienmēr

$$N(ABCD) - N(ADCB) = 1.$$

Lemma 1. Ja *q* – kaut kāds mazais četrstūris, apiesim to vienu reizi pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam. Saskaitīsim, cik reizes šādā kustībā noieta mala, kuras galapunkti apzīmēti ar *A* un *B*, un no šī skaitļa atņemsim to reižu skaitu, cik reizes šādā kustībā noieta mala, kuras galapunkti apzīmēti ar *B* un *A*. Iegūto starpību apzīmēsim ar $\delta(AB)$.

Tad $\sum_n \delta_n(AB) = 1$. (*n* ir mazo četrstūru numuri).

Tiešām, katru iekšējo nogriezni pieskaita vienreiz ar “+” zīmi, otrreiz ar “-“ zīmi, bet uz kvadrāta malām nogriežņu $[AB]$ ir par vienu vairāk, nekā $[BA]$.

Lemma 2. Ja *q* – mazais četrstūris, tad

$$\delta_q(AB) = \begin{cases} 1, & \text{ja } q \text{ ir } ABCD \text{ vai } ABDC, \\ -1, & \text{ja } q \text{ ir } BACD \text{ vai } BADC, \\ 0, & \text{citos gadijumos.} \end{cases}$$

Lemmu pierāda, pārbaudot visus gadījumus.

No lemmām seko, ka

$$\sum_n \delta_n(AB) = N(ABCD) + N(ABDC) - N(BACD) - N(BADC) = 1$$

Līdzīgi, ņemot *AB* vietā *CD*, iegūstam

$$N(ABCD) + N(BACD) - N(ABDC) - N(BADC) = 1.$$

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam vajadzīgo vienādību.

31.31. Apzīmēsim *x*, *y* un *z* ar vienības vektoriem
$a_1 = (\cos x, \sin x), a_2 = (\cos y, \sin y), a_3 = (\cos z, \sin z)$.

Saskaņā ar nevienādībām vektori viennozīmīgi atbilst skaitļiem *x*, *y* un *z*.
Iegūstam vienādību $a_1 + a_2 + a_3 = (a, b)$.
Vektoru (a, b) var viennozīmīgi izteikt kā trīs vienības vektoru summu tad un tikai tad, kad tā garums ir 3; tātad, ja $a^2 + b^2 = 9$.

31.32. Apgalvojums seko no analoģiskas teorēmas planimetrijā.
Ja pa nekolineāriem stariem ar kopīgu sākuma punktu *O* kutas divas vaboles *A* un *B* tā, ka visu laiku pastāv sakarība $\frac{1}{OB} - \frac{1}{OA} = 1$, tad taisne *AB* visu laiku iet caur fiksētu punktu.

31.33. Ja *a* un *b* nav savstarpēji pirmskaitļi, tad formā $ax + by$ nevar izteikt bezgalīgi daudzus naturālus skaitļus (visus, kas nedalās ar (a, b)). Tātad *a* un *b* ir savstarpēji pirmskaitļi.
Var pierādīt, ka formā $ax + by$ nevar izteikt tieši $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$ skaitļus. Iegūstam vienādību $(a-1)(b-1) = 70$.
Aplūkojot visus gadījumus, iegūstam, ka $a = 11, b = 8$.

31.34. Tāda formula ir, piemēram,

$$a_n = n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \cdot \lfloor\sqrt{n}\rfloor.$$

Tiešām, kad *n* pieņems vērtības $k^2, k^2+1, \ldots, k^2+2k$, a_n pieņems vērtības $0, 1, 2, \ldots, 2k$; tātad katru veselu nenegatīvu vērtību – bezgalīgi daudz reižu.
Ja neizmantojam operāciju [ ], tad $a_n = f(n)$ ir algebriska funkcija; var pierādīt, ka šādā gadījumā vienādojumam $f(x) = c$ atrisinājumu skaits ir galīgs.

31.35. Apskatām atbilstošo grafu.
Pieņemsim pretējo, ka meklējamā cikla nav. Aplūkosim pēc kārtas visas trūkstošās šķautnes. Ja, kādu trūkstošo šķautni ievietojot, meklējamais cikls nerodas, tad ievietojam to un atstājam. Ja, kādu trūkstošo šķautni ievietojot, meklējamais cikls rodas, tad šo šķautni neievietojam. Pēc galīga skaita soļu radīsies grfs, kurā

a) joprojām no katras virsotnes iziet $\geq \frac{n}{2}$ šķautnēm,

b) nav meklējamā cikla,

c) ievietojot jebkuru trūkstošo šķautni, cikls rodas.

Ievietojam jebkuru šķautni, kuras nav -- $A_1 A_n$. Tad rodas cikls $A_1 A_2 \dots A_n A_1$. Tas nozīmē, ka pirms $A_1 A_n$ ievietošanas grafā pastāvēja ceļš $A_1 A_2 \dots A_n$.

Paņemam šķautni $A_1 A_n$ atpakaļ. Pieņemsim, ka A_1 un A_i savienoti ar šķautni ; tad A_n nevar būt savienots ar šķautni A_{i-1}. (Pretējā gadījumā veidotos cikls)

A_1 ir savienots vismaz ar $\frac{n}{2}$ virsotnēm A_i. Tātad A_n nav savienota vismaz ar $\frac{n}{2}$ virsotnēm. Tātad A_n ir savienota ar ne vairāk kā $\left(n-\frac{n}{2}-1\right)<\frac{n}{2}$ virsotnēm. Iegūta pretruna.