Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 32. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

32.1. Pirmā apskatāmā skaitļa ciparu summa ir 9. Tāpēc tas dalās ar 9 un nevar būt pirmskaitlis

Otrais skaitlis dalās ar 101 un tāpēc nav pirmskaitlis.

32.2. No trijstūra viduslīnijas īpašības seko, ka $MN \parallel AC \parallel LK$, $ML \parallel BD \parallel NK$. Tātad *MNKL* ir paralelograms, kuram pēc dotā diagonāles ir perpendikulāras; tātad tas ir rombs. No šejienes $AC = 2MN = 2NK = BD$.

32.3. Prasīto var izdarīt, piemēram, šādi:

$1 = 2 - \frac{8+1}{9}$; $2 = 1 - 9 + 8 + 2$; $3 = 2 + \frac{8+1}{9}$; $4 = 1 + 9 - 8 + 2$;

$5 = 8 - \frac{9}{1+2}$; $6 = 9 + 1 - \frac{8}{2}$; $7 = 2 \cdot 8 \cdot 1 - 9$; $8 = 8 \cdot 2 - 9 + 1$;

$9 = 2 \cdot 9 - 8 - 1$; $10 = 2 \cdot 9 - 1 \cdot 8$; $11 = 2 \cdot 9 - 8 + 1$; $12 = (1+9) \cdot 2 - 8$.

32.4. Ap trijstūri *ABC* apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz leņķa *ABC* bisektrises. Tātad tas atrodas vienādā attālumā no trijstūra *ABC* malām *AB* un *BC*. Šīs malas ir apvilktās riņķa līnijas hordas; tāpēc tām jābūt vienādām, un trijstūris ABC ir vienādsānu. Tālāk, izmantojot teorēmu par ievilkto leņķi, atrodam trijstūra leņķus. Tie ir $72°, 72°, 36°$.

32.5. Pēc dotā pakāpeniski aprēķinām:

$$a_{n+3} = 2a_n + a_{n+1} + a_{n+2},$$

$$a_{n+4} = 2a_{n+1} + a_{n+2} + (2a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) = 2a_n + 3a_{n+1} + 2a_{n+2},$$

$$a_{n+5} = 4a_n + 4a_{n+1} + 5a_{n+2}.$$

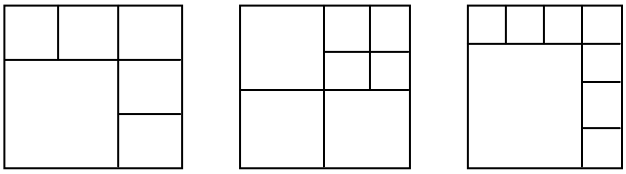
Saskaitot vienādības, iegūstam sakarību $a_{n+3}+a_{n+4}+a_{n+5}=8(a_n+a_{n+1}+a_{n+2})$, kas nozīmē, ka katru nākošo 3 locekļu summa ir 8 reizes lielāka par iepriekšējo. Tāpēc

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{99}=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+\cdots+(a_{97}+a_{98}+a_{99})=$$

$$3+3\cdot 8+3\cdot 8^2+\cdots+3\cdot 8^{32}=\frac{3}{7}\left(8^{33}-1\right).$$

33.6. Tā kā doto skaitļu reizinājums dalās ar 111, tātad arī ar pirmskaitli 37, tad viens no dotajiem skaitļiem dalās ar 37. Šis skaitlis var būt 37 vai 74. Ar pārlasi, izmantojot to, ka skaitļu summa ir simetrisks divciparu skaitlis, atrodam meklējamos pārus. Tie ir (74, 3), (3, 74), (37, 18), (18, 37).

33.7. Kā redzams no zīmējuma kvadrātu var sagriezt 6, 7 un 8 kvadrātos.



32.1. zīm.

Ievērosim, ka jebkurā zīmējumā, sagriežot jebkuru no kvadrātiem četros kvadrātos, kvadrātu skaits palielinās par 3. Tātad no sadalījuma 6 kvadrātos var iegūt sadalījumu 9 kvadrātos;
no sadalījuma 7 kvadrātos – sadalījumu 10 kvadrātos,
no sadalījuma 8 kvadrātos – sadalījumu 11 kvadrātos,
no sadalījuma 9 kvadrātos – sadalījumu 12 kvadrātos, utt.
Redzam, ka varēsim iegūt sadalījumu *n* kvadrātos jebkuram naturālam skaitlim *n*.

32.8. Nē, neeksistē. Tā kā jebkurš skaitlis $30m+25$ ir izsakāms gan formā $6t+1$, gan formā $5k$, tad virkne a_{30m+25} ir gan virknes a_{6t+1}, gan virknes a_{5k} apakšvirkne. Tādā gadījumā pēc dotā tās robežai būtu vienlaicīgi jābūt vienādai ar 1 un 2, bet tas nav iespējams.

32.9. Jāaplūko vektori, kas savieno sarkanos punktus ar zilajiem un to projekcijas uz taisni, kas paralēla vektoram $\vec{a}$.

32.10. Iekrāsosim sektorus melnā un baltā krāsā tā, ka blakusstāvošie sektori iekrāsoti dažādās krāsās (tad arī pretējie sektori iekrāsoti dažādi). Ievērosim, ka katrā gājienā figūra pārvietojas uz pretējās krāsas sektoru. Sākotnēji melnajos sektoros atrodas 5, t.i., nepāra skaits figūru. Katrā gājienā mainās figūru skaita paritāte, kuras atrodas melnajos sektoros. Tātad pēc 1982 gājieniem melnajos sektoros atradīsies nepāra skaits figūru. Ja tās atrastos visas vienā sektorā, tad melnajos sektoros atrastos 0 vai 10, t.i., pāra skaits figūru. Tātad prasīto izdarīt nav iespējams.

32.11. Pakāpeniski pārveidojot izteiksmi vienādības kreisajā pusē, iegūstam

$$\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)=\frac{1-\cos(2\alpha+2\beta)}{2}+\frac{1+\cos(2\alpha-2\beta)}{2}=$$
$$1+\frac{1}{2}\left(-\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(2\alpha-2\beta)\right)=$$
$$1+\frac{1}{2}(\sin 2\alpha\sin 2\beta-\cos 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\alpha\sin 2\beta)=$$
$$1+\sin 2\alpha\sin 2\beta.$$

Prasītais pierādīts.

32.12. Izmantojot formulas, doto nevienādību pārveidojam formā

$$2\sin x\cos x>3\sin x-4\sin^3 x \quad \Leftrightarrow \quad \sin x\left(2\cos x-3+4\sin^2 x\right)>0\,.$$

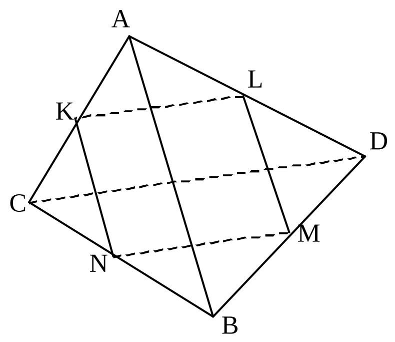
Tā kā pie $0°<x<90°$ pastāv nevienādība $\sin x>0$, iegūstam

$$2\cos x-3+4\sin^2 x>0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\cos^2 x-2\cos x-1<0\,.$$ Tātad

$\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}<\cos x<\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Ievērojot, ka $0°<x<90°$, iegūstam atbildi.

Atbilde: $\arccos\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}<x<90°.$

32.13. Apzīmēsim šo šķēlumu ar *KLMN*, bet šķēlējplakni ar $\propto$. Ja *LM* krustotos ar *AB*, tad *AB* krustotos ar $\propto$, bet dots, ka *AB* || $\propto$. Tāpēc *LM* || *AB*. Līdzīgi pierāda, ka $KN \parallel AB$, $KL \parallel CD$, $NM \parallel CD$. No šejienes seko, ka *KLMN* ir paralelograms.



32.2. zīm.

Pierādīsim otro apgalvojumu. No pirmās daļas risinājuma seko, ka $AB \perp CD$ un $AC \perp BD$. Pamatojoties uz vektoru skalārā reizinājuma īpašībām, tas nozīmē, ka $\left(\overline{AB}, \overline{CD}\right) = 0$ un $\left(\overline{AC}, \overline{BD}\right) = 0$. No šejienes iegūstam

$$\left(\overline{AD}, \overline{BC}\right) = \left(\overline{AB} + \overline{BD}, \overline{BD} + \overline{DC}\right) = \left(\overline{AB}, \overline{DC}\right) + \left(\overline{BD}, \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AC}\right) =$$
$$\left(\overline{AB}, \overline{DC}\right) + \left(\overline{BD}, \overline{AC}\right) = 0$$

Tas nozīmē, ka $AD \perp BC$.No šejienes, pamatojoties uz pirmās daļas atrisinājumu, iegūstam prasīto.

32.14. Izvēlēsimies vektoru sistēmu *S*, kuras summa ir visgarākā. Šo summu apzīmēsim ar $\vec{s}$. Caur 25-stūra centru *O* novilksim taisni perpendikulāri $\vec{s}$. Taisne *t* sadala plakni divās pusplaknēs. To, kura satur vektoru $\vec{s}$, sauksim par pozitīvo. Pierādīsim divas lemmas.

Lemma. Sistēma *S* satur visus vektorus, kuru galapunkti atrodas pozitīvajā pusplaknē.

Lemma. Sistēma *S* nesatur nevienu vektoru, , kuru galapunkti atrodas negatīvajā pusplaknē.

Pierādījums seko no tā, ka pirmajā gadījumā, pievienojot vektoru ar galapunktu pozitīvajā pusplaknē, mēs palielinātu vektoru summu; bet otrajā gadījumā, atmetot vektoru ar galapunktu negatīvajā pusplaknē, mēs palielinātu vektoru summu.

No šīm lemmām seko, ka sistēma *S* satur 12 vai 13 pēc kārtas ņemtus vektorus. Jebkuras šādas vektoru sistēmas summas garums ir konstants lielums.

32.15. No četriem skaitļiem a, b, c, d vismaz divi dod vienādus atlikumus, dalot ar 3. Šo skaitļu starpība dalās ar 3, tātad arī apskatāmais reizinājums dalās ar 3.

Ja starp dotajiem skaitļiem ir vismaz 3 vienādas paritātes skaitļi, tad to savstarpējās starpības dalās ar 2, un viss reizinājums dalās ar 8.

Pretējā gadījumā ir divi pāra skaitli, kuru starpība dalās ar 2, un divi nepāra skaitļi, , kuru starpība dalās ar 2. Arī šajā gadījumā reizinājums dalās ar 4.

Tātad reizinājums dalās gan ar 3, gan ar 4, tāpēc tas dalās ar 12.

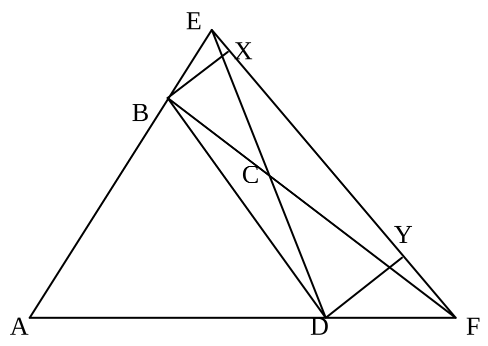
32.16. Vienādojumu pārveidojam formā

$2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$.

Apzīmējot $y = \cos 2x$, atrisinām vienādojumu.

Atbilde: $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n, \pm\frac{\pi}{6} + \pi n \right\}, \quad n \in Z$.

32.17. Tā kā $S_{ADK} = S_{ABF}$, tad, atņemot no abām vienādības pusēm S_{ABCD} un pieskaitot abām vienādības pusēm S_{ECF} , iegūstam $S_{EBF} = S_{EDF}$. Tā kā abiem trijstūriem *EBF* un *EDF* ir kopīgs pamats, tad arī to augstumi *BX* un *DY* ir vienādi. Bet tas nozīmē, ka $EF \parallel BD$.



32.3. zīm.

32.18. Šīm trijstūra piramīdām ir vienāda laukuma pamata trijstūri : AA_1B -- pirmajai piramīdai, AA_1B_1 -- otrajai piramīdai (tiem ir kopīgs pamats AA_1 un vienādi augstumi, kā perpendikuli starp paralēlām taisnēm AA_1 un BB_1). Tāpat šīm piramīdām ir vienādi augstumi – attālums no taisnes CC_1 līdz plaknei AA_1B_1B . Tātad to tilpumi ir vienādi.

32.19. Ievietojot dotajā nevienādībā $a = b$, iegūstam, ka $f(a) \geq 0$ visiem *a*.

Ņemot $a = 0$ un $b = \frac{1}{2}$, iegūstam

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = f\left(\tfrac{0+1}{2}\right) \leq f(0) + f(1) = 0 .$$

Tātad $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Līdzīgi pierāda, ka $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$. Tātad pirmais uzdevuma punkts pierādīts.

Uzdevuma nosacījumus apmierina, piemēram, funkcija, kura ir vienāda ar 0, ja $x = \frac{m}{2^k}$ kur *m*, k – veseli skaitļi, un vienāda ar 1 pārējām *x* vērtībām. Pārbaudiet, ka šī funkcija apmierina uzdevuma nosacījumus.

32.20. Pierādīsim, ka punktu nevar būt vairāk par pieciem.

Pieņemsim, ka ir 6 punkti. Aplūkosim vienu punktu *A*. No tā iziet tikai divu krāsu līnijas. Tāpēc var atrast 3 tādus punktus *B*, *C*, *D*, kurus ar *A* savieno vienas krāsas (melnas) līnija. Nekādus divus no punktiem *B*, *C*, *D* nevar savienot melna līnija, jo citādi veidotos melns trijstūris.

Pieņemsim, ka līnija *BC* ir sarkana. Tad līnijas *BD* un *CD* nevar būt baltas, jo tad no vienas virsotnes izietu trīs krāsu līnijas. Tātad līnijas *BD* un *CD* ir sarkanas, bet tas nozīmē, ka 3 punkti *B*, *C*, *D* savienoti ar vienas krāsas līnijām. Tātad punktu ir ne vairāk kā 5.

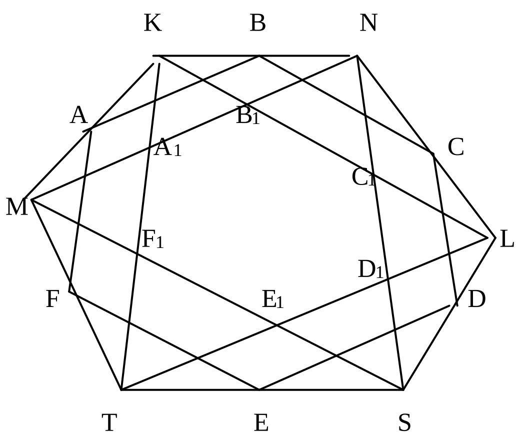
Piemērs ar 5 punktiem ir šāds: regulāra piecstūra malas nokrāsojam melnas, bet diagonāles baltas.

32.21..Tā kā $3xyz > 0$, tad no pirmā vienādojuma seko, ka $x > 0, y > 0$ (citādi vienādības kreisā puse būtu negatīva). No otrā vienādojuma iegūstam

$$x^2 = 2(y+z) < 2(x+x) \quad \Leftrightarrow \quad x(x-4) < 0.$$

Tā kā x ir naturāls skaitlis, tad der tikai vērtības $x = 1, x = 2, x = 3$. No otrā vienādojuma seko, ka x ir pāra skaitlis; tātad $x = 2$, $x^2 = 4 = 2(y+z)$, $y = z = 1$. Pārbaude parāda, ka atrisinājums $(2, 1, 1)$ apmierina arī pirmo vienādojumu.

32.22. Skat. 32.4. zīm.



32.4. zīm.

Tā kā AB ir trijstūra MKN viduslīnija, tad $AB = \frac{1}{2} MN$. Tāpēc, lai uzdevums būtu atrisināts, pietiek pierādīt, ka sešstūra $MKNLST$ perimetrs mazāks par tā sešu diagonāļu MN, KL, NS, LT, SM, TK garumu summu. Katrai no diagonālēm aplūkojam divus tās malējos nogriežņus. Piemēram, diagonālei MN tie ir nogriežņi MA_1 un B_1N. No trijstūra nevienādības seko, ka jau šo diagonāļu daļu summa lielāka par sešstūra perimetru. Tiešām, summējot nevienādības

$MA_1 + A_1K > MK$, $KB_1 + B_1N > KN$, $NC_1 + C_1L > NL$,

$LD_1 + D_1S > LS$, $SE_1 + E_1T > ST$, $TF_1 + F_1M > TM$,

Iegūsim prasīto nevienādību.

32.23. Vispirms iekrāsosim galdiņu šahveida kārtībā. Skaidrs, ka zirdziņa kustības laikā krāsas mainīsies šādi: m, b, m, b, m, b, … . Augšējo un apakšējo galdiņa rindas sauksim par ārējam. Ārējo un iekšējo lauciņu skaits ir vienāds. No katra ārēja lauciņa zirdziņš nonāk iekšējā lauciņā. Tā kā ārējo un iekšējo lauciņu skaits ir vienāds un zirdziņš apiet visus lauciņus, tad no katra iekšējā lauciņa tam jāiet uz ārējo lauciņu. Tas nozīmē, ka apgaitas laikā ārējie un iekšējie lauciņi arī mainīsies šādi: ā, ie, ā, ie, ā, ie, … . Tā kā arī lauciņu krāsas mainās pamīšus, tad visu ārējo lauciņu krāsām ir jābūt vienādām. Iegūta pretruna, kas nozīmē, ka apiet šādu galdiņu zirdziņš nevarēs.

32.24. Deviņstūra virsotnes sadala riņķa līniju 9 lokos. Vismaz vienam no šiem lokiem pieder divas no desmitstūra virsotnēm. Tātad uz riņķa līnijas secīgi izvietoti punkti *A*, *B*, C, *D*, kur *A* un *D* -- deviņstūra virsotnes, bet *B* un *C* -- desmitstūra virsotnes.

Tā kā $\cup AD = 40°$ un $\cup BC = 36°$, tad $\cup AB + \cup CD = 4°$. Tātad viens no šiem lokiem nepārsniedz $2°$.

32.25. Jā, var.

1, 3, 4, 2.

2, 6, 8, 4, 1, 5, 7, 3.

4, 12, 16, 8, 2, 10, 14, 6, 3, 11, 15, 7, 1, 9, 13, 5.

Šos sakārtojumus iegūst induktīvi. Ja skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ apmierina uzdevuma prasības, tad arī $2n$ skaitļi $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n, 2a_1 - 1, 2a_2 - 1, \ldots, 2a_n - 1$ apmierina uzdevuma prasības.

32.26. Tā kā $1982^{1982} + 1 < 10000^{2000} = 10^{8000}$, tad sākotnējam skaitlim ir ne vairāk kā 8000 ciparu. Tāpēc tā ciparu summa A nepārsniedz $9 \cdot 8000 = 72000$. Līdzīgi iegūstam $B \le 45$, $C \le 12$, $D \le 9$. Tā kā skaitlis un tā ciparu summa dod vienādus atlikumus pēc moduļa 9, tad $1982^{1982} + 1 \equiv D \pmod 9$.

Tālāk veicam aprēķinus pēc moduļa 9.

$1982^{1982}+1\equiv 2^{6\cdot 330+2}+1\equiv 64^{330}\cdot 2^2+1\equiv 1^{330}\cdot 4+1\equiv 5 \pmod 9$.

Tātad $D=5$.

32.27. Turnīrā vīrieši savā starpā izspēlēja $\frac{n(n-1)}{2}$ spēles un izcīnīja tikpat uzvaras. Jaunieši izspēlēja $n(2n-1)$ spēles un izcīnīja tikpat uzvaras. Vīrieši pret jauniešiem nospēlēja $2n^2$ spēles. Ja x spēlēs uzvarēja vīrieši, tad kopējais vīriešu uzvaru skaits ir $\frac{n(n-1)}{2}+x$, bet kopējais jauniešu uzvaru skaits ir $n(2n-1)+(2n^2-x)$. Iegūstam vienādojumu

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}+x}{n(2n-1)+2n^2-x}=\frac{7}{5}.$$

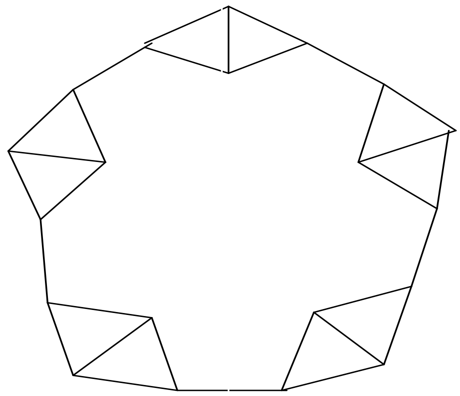
To var pārveidot formā $24x=51n^2-9n$. Tā kā $x\le 2n^2$, tad $51n^2-9n\le 48n^2$, t.i. $n(n-3)\le 0$. Tā kā $n\ne 0$, tad atliek pārbaudīt tikai vērtības 1, 2 un 3. Izrādās, ka der tikai vērtība $n=3$. Tādā gadījumā $x=18$.

Šī n vērtība der. Ja turnīrā piedalās 3 vīrieši un 6 jaunieši un visi vīrieši spēlēs pret jauniešiem izcīna uzvaras, tad kopā vīrieši izcīna 21 uzvaru, bet jaunieši -- 15 uzvaras.

32.28. Pārveidojot doto izteiksmi, iegūstam

$$\begin{aligned}&x_1+x_2+x_3+x_4-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_4-x_4x_1=\\&x_1(1-x_2)+x_2(1-x_3)+x_3(1-x_4)+x_4(1-x_1)<\\&(1-x_2)+x_2+(1-x_4)+x_4=2\end{aligned}$$

32.29. Jā, to var izdarīt, piemēram, tā kā parādīts 32.5. zīmējumā. Zīmējumā uzzīmētie nogriežņi visi ir vienādi; to galapunkti atrodas prasītās punktu sistēmas punktos.



32.5.zīm.

32.30. Nē, ne noteikti.

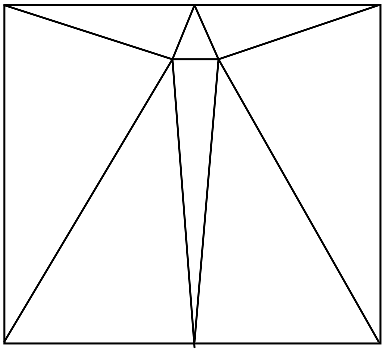
32.31. Vispirms parādīsim, ka taišņu skaitu nevar samazināt.

Apskatīsim regulāra 1982-stūra virsotnes. Lai tās visas atdalītu vienu no otras, katra 1982-stūra mala ir jākrusto ar vismaz vienu novilkto taisni; ja malu *MN* nekrusto neviena novilktā taisne, tad virsotnes *M* un *N* nebūs atdalītas. Pavisam ir 1982 malas, bet viena taisne var krustot ne vairāk kā 2 malas. Tātad nepieciešamas vismaz $\frac{1982}{2} = 991$ taisnes.

Vispirms izvēlēsimies virzienu tā, lai šajā virzienā neietu neviena no taisnēm, kas savieno dotos punktus. Izvēloties taisni šajā virzienā un paralēli to pārvietojot, novietosim to tā, ka taisnes *t* abās pusēs atrodas vienāds skaits (t.i. 991) punktu. Pēc tam izvēlamies taisni l_1, kas savieno divus punktus *M* un *N* taisnes *t* dažādās pusēs un visi pārējie punkti atrodas vienā pusē no l_1. To nedaudz paralēli pārbīdot, punkti *M* un *N* būs atdalīti no citiem punktiem, kā arī savstarpēji ar taisni *t*.

Turpinot šo procesu, katra nākošā taisne atdalīs 2 punktus no visiem pārējiem. Skaidrs, ka pēdējie 2 punkti atdalīsies automātiski. Tātad kopā būs vajadzīgas $1 + \frac{1982-2}{2} = 991$ taisnes.

32.32. Kvadrātu var sagriezt 8 šaurleņķa trijstūros tā kā parādīts zīmējumā.



32.6. zīm.

32.33. Apgalvojumu pierāda, izmantojot spēka momenta jēdziena matemātisko interpretāciju.

32.34. Uzdevuma pierādījums balstās uz faktu, ka taisne izliektas funkcijas grafiku var krustot ne vairāk kā divos punktos.

32.35. Aprēķināsim katra zinātnieka korespondentu skaitu gan vienā ārvalstī, gan otrā ārvalstī. Starp šiem $6n$ skaitļiem eksistē vismazākais (vai arī vairāki vismazākie); pieņemsim, ka tas ir x, un valsts A zinātniekam a valstī B ir x korespondentu. Tad valstī C zinātniekam a ir $n + 1 - x$ korespondentu.

Pieņemsim, ka b ir viens no zinātnieka a korespondentiem valstī B. Saskaņā ar skaitļa x izvēli zinātniekam b valstī C ir vismaz x korespondenti. Tātad zinātniekiem a un b valstī C kopā ir vismaz $n+1-x+x=n+1$ korespondentu. Tā kā valstī C ir tikai n zinātnieku, tad tajā atradīsies tāds zinātnieks c, kas sarakstās gan ar a, gan ar b. Zinātniekus a, b, c var pieņemt par meklētajiem zinātniekiem.