Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 34. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

8. klase

34.1. Atrast

a) visu to naturālo skaitļu summu, kas nepārsniedz 1000 un dalās ar 5;

b) visu to naturālo skaitļu summu, kas nepārsniedz 1000 un dalās vai nu ar 3, vai ar 5.

34.2. Vai var atrast tādus divus skaitļus *a* un *b*, lai vienlaikus būtu spēka šādas īpašības:

a) $|a-b| \geq 1984$;

b) vienādojumam $ax^2+(a+b)x+b=x$ nav atrisinājumu.

34.3. Trijstūrī *ABC* novilktas iekšējo leņķu bisektrises, kas to sadala 6 mazos trijstūrīšos. Zināms, ka četriem no šiem trijstūrīšiem laukumi ir vienādi. Pierādīt, ka

a) *ABC* ir vienādsānu trijstūris;

b) *ABC* ir regulārs trijstūris.

34.4. Kubam katra skaldne sadalīta 4 vienādos kvadrātos. Katrs no iegūtajiem 24 kvadrātiem nokrāsots balts, melns vai sarkans. Zināms, ka nekādiem diviem vienā krāsā nokrāsotiem kvadrātiem nav kopīgas malas. Pierādīt, ka katrā krāsā nokrāsoti 8 kvadrāti. Minēt kādu šādu krāsojuma piemēru.

34.5. Doti atsperu svari ar skalu, kuras iedaļas vērtība ir 1 g, un četras monētas. Zināms, ka katra monēta sver vai nu 9 g, vai 10 g, bet nav zināms, cik ir viena tipa un cik otra tipa monētu (var pat gadīties, ka visas monētas ir viena tipa). Kā ar 3 svēršanām noskaidrot katras monētas svaru? (Drīkst svērt arī vairākas monētas reizē.)

9. klase

34.6. Aplūkosim funkciju $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a, b, c, d$ -- konstantes). Dots, ka $g(x)=f'(x), h(x)=g'(x), t(x)=h'(x)$. Zināms, ka

$t(6)=6,\ h(2)=2,\ g(3)=3,\ f(1)=1.$ Aprēķināt *a*, *b*, *c*, *d*.

34.7. Plaknē doti 5 punkti *A*, *B*, *C*, *D* un *E*. Pierādīt, ka

a) eksistē tāds punkts *M*, ka $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}=\vec{0}$;

b) eksistē tikai viens punkts ar tādu īpašību.

34.8. Konstruēt kaut vienu funkciju $f(x)$, kas vienlaikus apmierina šādas trīs īpašības:

a) $f(x)$ definēta visām *x* vērtībām;

b) eksistē divi tādi skaitļi *a* un *b*, ka $|f(a)-f(b)|\neq|a-b|$;

c) ja $x-y$ ir racionāls skaitlis, tad $|f(x)-f(y)|=|x-y|$.

34.9. Autobusā brauc 10 cilvēki. Ir zināms, ka starp jebkuriem trim no šiem cilvēkiem vismaz divi ir savā starpā pazīstami. Pierādīt, ka starp šiem 10 cilvēkiem var atrast četrus, kas visi ir pa pāriem savā starpā pazīstami.

34.10. Jānis iedomājies naturālu skaitli no 1 līdz 16. Andris drīkst viņam uzdot jautājumus, uz kuriem jāatbild ar "jā" vai "nē".

a) Kā Andris var noskaidrot iedomāto skaitli, uzdodot 4 jautājumus, ja visas Jāņa atbildes ir pareizas?

b) Kā Andris var noskaidrot iedomāto skaitli, uzdodot 7 jautājumus, ja uz vienu jautājumu Jānis drīkst atbildēt nepareizi (bet drīkst arī uz visiem jautājumiem atbildēt pareizi)?

c) Vai a) gadījumā Andris var noskaidrot iedomāto skaitli, uzdodot tikai 3 jautājumus?

10. klase

34.11. Pierādīt identitāti

$$\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\cos 2\alpha\left(1-\tfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right).$$

34.12. Skolotāja uzrakstīja uz tāfeles naturālu skaitli *n*. Pirmais skolēns apgalvoja, ka *n* dalās ar 2. Otrais skolēns apgalvoja, ka *n* dalās ar 3. Trešais skolēns apgalvoja, ka *n* dalās ar 4, un tā tālāk. Trīsdesmitais skolēns apgalvoja, ka *n* dalās ar 31.

Ir zināms, ka divu skolēnu apgalvojumi ir aplami, bet 28 – patiesi, turklāt abos aplamajos apgalvojumos runa ir par dalīšanos ar skaitļiem, kas viens no otra atšķiras par 1. Kuri apgalvojumi ir aplami?

34.13. Kubs atrodas vienā pusē no plaknes α. Pierādīt, ka tā virsotnes var sadalīt divās grupās tā, ka vienas grupas virsotņu attālumu summa līdz plaknei α ir vienāda ar otras grupas virsotņu attālumu summu līdz α.

34.14. Apskatām labirintu, kura gaiteņi ir izliekta n-stūra visas malas un visas diagonāles. Kāds ir mazākais spuldžu skaits, kas jānovieto labirintā, lai to pilnīgi apgaismotu?

34.15. Pa apli pēc kārtas izrakstīti 64 skaitļi $a_1; a_2; \ldots; a_{64};$ katrs no tiem ir +1 vai –1. Aprēķinām reizinājumus $b_1 = a_1a_2; b_2 = a_2a_3; b_3 = a_3a_4; \ldots; b_{63} = a_{63}a_{64}; b_{64} = a_{64}a_1$ un pēc tam aizvietojam a_1 ar b_1, a_2 ar b_2, … , a_{64} ar b_{64}. Ar iegūto skaitļu sistēmu atkārtojam tādu pašu operāciju, ar iegūto atkal, utt. Pierādīt, ka kādreiz iegūsim situāciju, kurā visi 64 skaitļi ir +1.

11. klase

34.16. *ABCD* – trijstūra piramīda. Pierādīt, ka

a) šķautņu *AC*, *CB*, *AD* un *DB* viduspunkti atrodas vienā plaknē;

b) plakne, kas novilkta caur šiem viduspunktiem, dala piramīdas tilpumu uz pusēm.

34.17. Pierādīt, ka patvaļīgiem reāliem skaitļiem *a*, *b*, *c*, *d* un *e* pastāv nevienādība
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$.

34.18. a) Pierādīt identitāti
$\sin 4\alpha = 8\sin\alpha\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{4}\right)\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right)$.

c) Vispārināt to gadījumam, kad $\sin 4\alpha$ kreisajā pusē aizstāts ar $\sin 2^k\alpha$, $k \in N$, un pierādīt vispārināto identitāti.

34.19. Kvadrātiska tabula sastāv no $n \times n$ rūtiņām. Šajās rūtiņās ierakstīti skaitļi no 1 līdz n^2 (katrs skaitlis vienā rūtiņā), turklāt tā, ka skaitļu summas visās rindiņās un kolonnās savā starpā vienādas. Apzīmēsim vienas rindiņas skaitļu summu ar $M(n)$.

a) Pierādīt, ka $M(n)$ nav pirmskaitlis.

b) Kāda ir vismazākā n vērtība, kurai atbilstošā summa $M(n)$ dalās ar 1984?

34.20. Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa; rūtiņas malas garums ir 1 m. Pa dalījuma līnijām uzbūvēta augsta noslēgta siena, kas dala plakni divos apgabalos: iekšējā un ārējā. Blakus sienai no zemes izlien kurmis, kas redz tikai 1 m attālumā un prot skaitīt tikai līdz 10. Vai kurmis var uzzināt, kur viņš atrodas – sienas iekšpusē vai ārpusē?

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

8. un 9. klase

34.21. Pierādīt, ka katrā augošā aritmētiskā progresijā ir bezgalīgi daudz skaitļu, kas nav vesela skaitļa pakāpes ar kāpinātāju, lielāku par 1.

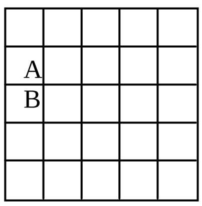
34.22. Riņķa līnija ϖ_1 pieskaras riņķa līnijai ϖ punktā *B* un atrodas tās iekšpusē. Riņķa līnija ϖ_2 vienāda ar ϖ_1, pieskaras tai ārēji punktā *A* un krusto ϖ divos punktos *P* un *Q*. Zināms, ka ϖ rādiuss ir divas reizes lielāks par ϖ_1 rādiusu. Pierādīt, ka *A*, *B* un viens punktiem *P* un *Q* atrodas uz vienas taisnes.

34.23. Kādu lielāko daudzumu vienādu kvadrātu var novietot tā, lai tie nepārklātos un nesaskartos, bet katrs no tiem krustotu Dekarta koordinātu sistēmas *Oxy* abas asis?

34.24. Šaha zirdziņam jāapstaigā kvadrāts ar izmēriem 5×5 rūtiņas, katrā rūtiņā nonākot tieši vienu reizi (izejas pozīcijā nav jānonāk). Vai to var izdarīt, ja zirdziņš sākumā atrodas

a) rūtiņā *A*,

b) rūtiņā *B* (skat. 34.1. zīm.)



34.1. zīm.

34.25. Pilsēta ir seši uz abām pusēm bezgalīgi bulvāri, kurus krusto bezgalīgi daudz tiem perpendikulāru galīgu ielu, veidojot kvadrātiskus kvartālus (tādējādi pilsētas plāns atgādina rūtiņu lapas joslu ar platumu 5 rūtiņas, kas ir bezgalīga uz abām pusēm).

Punktā M atrodas divi miliči, bet kaut kur pilsētā slēpjas noziedznieks. Miliči pamana noziedznieku, ja atrodas ar to uz vienas ielas vai viena bulvāra. Miliču un noziedznieka maksimālie ātrumi ir vienādi. Vai miliči var rīkotie tā, lai garantēti pamanītu noziedznieku, ja

a) zināms, ka sākumā noziedznieks nav vairāk kā 1000 kvartālu malas garumu attālumā;
b) par noziedznieka atrašanās vietu nekas nav zināms?

10. klase

34.26. Dots, ka *ABCD* – izliekts četrstūris, bet M_1, M_2, M_3, M_4 ir atbilstoši trijstūru *BCD*, *ACD*, *ABD* un *ABC* mediānu krustpunkti. Pierādīt, ka *ABCD* un $M_1M_2M_3M_4$ ir līdzīgi četrstūri.

34.27. Dots, ka $x_1, x_2, \dots, x_n$ ir dažādi naturāli skaitļi, kas lielāki par 1. Pierādīt, ka $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}<\frac{3}{4}$.

34.28. Dots, ka *A*, *B*, *C* – pozitīvi skaitļi un $A+B+C=\pi$. Pierādīt, ka $A\cos B+\sin A\cdot\cos C>0$.

34.29. Tenisa turnīrā katrs spēlētājs spēlē ar katru vienu reizi, neizšķirtu nav. Saka, ka spēlētājs *A* pārspēj *B*, ja *A* vai nu uzvarējis *B*, vai arī uzvarējis tādu spēlētāju *C*, kas savukārt uzvarējis *B*. Par čempionu sauc tādu spēlētāju, kas pārspēj visus citus. Vai ir iespējams tāds turnīrs, kurā ir tieši divi čempioni?

34.30. Funkcija $f(x)$ ir stingri augoša, definēta naturālām argumenta vērtībām, tās vērtības ir naturāli skaitļi, $f(2)=2$. Ja *m* un *n* ir tādi naturāli skaitļi, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad $f(m\cdot n)=f(m)\cdot f(n)$. Pierādīt, ka visiem *x* pastāv vienādība $f(x)=x$.

11.klase

34.31. Ar kādu lielāko skaitu vienādu, no nulles atšķirīgu ciparu, var beigties naturāla skaitļa kvadrāts?

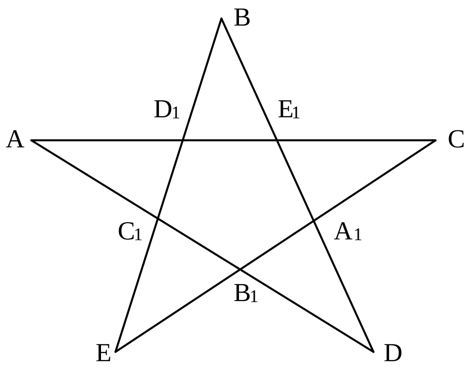
34.32. Dots, ka α un β ir dažādi šauri leņķi, bet k – naturāls skaitlis. Pierādīt, ka

$$\left|\frac{\cos k\alpha \cdot \cos\beta - \cos k\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha - \cos\beta}\right| < k^2 - 1.$$

34.33. Dots, ka $P(x)$ ir n-tās pakāpes polinoms, $n > 1$. Pierādīt, ka ne no viena Dekarta koordinātu plaknes punkta funkcijas $y = P(x)$ grafikam nevar novilkt vairāk nekā n pieskares.

34.34. Apskatīsim slēgtu lauztu līniju ar $2n$ posmiem, kuras virsotnes atrodas regulāra $2n$-stūra virsotnēs. Pierādīt, ka starp tās posmiem ir vismaz divi, kas ir paralēli savā starpā.

34.35. Dots, ka trijstūru AC_1D_1, BD_1E_1, CE_1A_1, DA_1B_1 un EB_1C_1 laukumi ir 1. Aprēķināt piecstūra $A_1B_1C_1D_1E_1$ laukumu (skat. 34.2. zīm.).



34.2. zīm.