Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

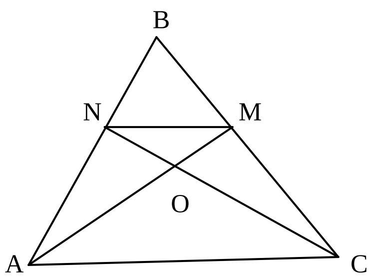
LATVIJAS REPUBLIKAS 35. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

35.1. Vienādojumu kāpina 11. pakāpē un pēc tam pārveido.
Atbilde: $x = 1985$.

35.2. Apzīmēsim doto četru riņķa līniju centrus ar *M*, *N*, *P*, *R*. Ap četrstūri *MNPR* var apvilkt riņķa līniju ar centru punktā O . Tā kā četrstūra *ABCD* malas ir paralēlas četrstūra *MNPR* malām, tad šo četrstūru atbilstošie leņķi ir vienādi. Tātad arī ap četrstūri *ABCD* var apvilkt riņķa līniju.

35.3. Skat 35.5. zīm.



35.5.zīm.

a) Trijstūros *MNO*, *CMO*, *ANO*, *ACO* novilksim augstumus pret taisni *NC*. Trijstūriem *MNO* un *CMO* augstumi ir vienādi, apzīmēsim tos ar h_1. Trijstūriem *ANO* un *ACO* arī ir vienādi, apzīmēsim tos ar h_2. Trijstūra *MNO* laukumu apzīmēsim ar S_4. Tad

$$S_1 = NO \cdot \frac{h_2}{2};\ S_2 = OC \cdot \frac{h_1}{2};\ S_3 = OC \cdot \frac{h_2}{2};\ S_4 = ON \cdot \frac{h_1}{2}.$$

No šejienes $S_1 S_2 = ON \cdot OC \cdot \frac{h_1 h_2}{4} = S_3 S_4$ un $S_4 = \frac{S_1 S_2}{S_3}$.

b) Trijstūra *BMN* laukumu apzīmēsim ar S_5. Tad

$$\frac{S_{BMN}}{S_{ACN}}=\frac{S_5}{S_1+S_4}=\frac{BN}{AN};\quad \frac{S_{BCN}}{S_{ACN}}=\frac{S_5+S_4+S_2}{S_1+S_3}=\frac{BN}{AN}.$$

No šejienes $\frac{S_5}{S_1+S_4}=\frac{S_5+S_4+S_2}{S_1+S_3}$. Ievērojot, ka $S_4=\frac{S_1S_2}{S_3}$, iegūstam

$$S_{ABC}=\frac{S_3\left(S_1S_2+S_1S_3+S_2S_3+S_3^2\right)}{S_3^2-S_1S_2}.$$

35.4. To var izdarīt. Vispirms izvietojam pirmos 15 akmeņus piecās kaudzēs pa 3 akmeņiem ar vienādiem svariem. Kaudzes ir šādas:

(1, 15, 8), (2, 13, 9), (3, 11, 10),(4, 14, 6), (5, 12, 1).

Pēc tam pievienojam pa 10 nākošajiem (katrā kaudzē pa diviem ar vienādu kopējo svaru -- smagākais + vieglākais, utt.).

35.5. a) Pieņemsim pretējo, ka to var izdarīt. Vienādībā

$$\pm\frac{1}{1}\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{3}\pm\cdots\pm\frac{1}{12}=0$$

novedīsim visus kreisās puses locekļus pie mazākā kopsaucēja $2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11$. Papildreizinātāji skaitītājā visiem locekļiem, izņemot $\frac{1}{8}$, būs pāra skaitļi, bet loceklim $\frac{1}{8}$ -- nepāra skaitlis. Tāpēc skaitītājs kreisās puses daļai būs nepāra skaitlis; tātad tas nav 0, un vienādība neizpildās.

b) Lai arī kādi skaitļi nebūtu nodzēsti, iepriekšējais spriedums paliek spēkā, ja tikai $\frac{1}{8}$ nav nodzēsta. Tātad $\frac{1}{8}$ noteikti jānodzēš.

Aplūkojot dalāmību ar 3, konstatējam, ka jānodzēš $\frac{1}{9}$.

Līdzīgi pierāda, ka jānodzēš $\frac{1}{7}$ un $\frac{1}{11}$.

Ja $\frac{1}{5}$ un $\frac{1}{10}$ ir ar vienādām zīmēm, tās aizstājam ar vienu daļu $\frac{3}{10}$, ja ar dažādām – ar daļu $\frac{1}{10}$. Aplūkojot dalāmību ar 5, konstatējam, ka arī šīs daļas jāatmet.

No atlikušajiem skaitļiem var sastādīt prasīto summu

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=0.$$

34.6. Aplūkojot dažādus vektoru izvietojumus, iegūstam, ka doto vektoru summa var būt nulle tikai, ja paralēlo malu attiecība ir 1 vai 3.

34.7. Ņemot $y=1$, iegūstam $|f(x)|=|x-1|$.

No vienādības $|f(x)-f(y)|=|x-y|$ un nepārtrauktas funkcijas definīcijas seko, ka funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta.

Tātad iespējami šādi četri varianti.

$f_1(x)=x-1$,

$f_2(x)=1-x$,

$$f_3(x)=\begin{cases}1-x, \text{ ja } x\le 1\\ x-1, \text{ ja } x>1.\end{cases}$$

$$f_4(x)=\begin{cases}1-x, \text{ ja } x>1\\ x-1, \text{ ja } x\le 1.\end{cases}$$

Viegli redzēt, ka der tikai pirmās divas funkcijas.

34.8. Pierāda sekojošu apgalvojumu: taisnstūri, kas piekļaujas kvadrāta malām, ir vienādi. Pieņemam pretējo, ka tie nav vienādi. Tad no šiem taisnstūriem izvēlas visgarāko (tas ir arī visšaurākais), bet nākamais taisnstūris virzienā pretēji pulksteņa rādītāja virzienam izrādās garāks. Iegūta pretruna, kas pierāda mūsu apgalvojumu.

Ja taisnstūri vienādi, tad acīmredzami iekšējais taisnstūris ir kvadrāts.

34.9. Doto skaitļu summa ir $\frac{n(n+1)}{2}$. Pēc tam, kad skaitlis *k* tika nodzēsts no tāfeles, atlikušo skaitļu vidējais aritmētiskais ir

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}-k}{n-1}=\frac{n}{2}+\frac{n-k}{n-1}.$$

Skaitlis $\frac{n}{2}$ ir vai nu vesels skaitlis, vai arī skaitlis, kura daļveida daļa ir $\frac{1}{2}$. Skaitlis $\frac{n-k}{n-1}$ atrodas intervālā $(0,1]$. Ievērojot, ka $\frac{602}{17}=35\frac{7}{17}$ iegūstam divas iespējas:

$$\begin{cases}\frac{n}{2}=35\\ \frac{n-k}{n-1}=\frac{7}{17}\end{cases} \quad \text{vai} \quad \begin{cases}\frac{n}{2}=34\frac{1}{2}\\ \frac{n-k}{n-1}=\frac{7}{17}+\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Pirmajā gadījumā vienādojuma atrisinājumi nav veseli skaitļi. Otrajā gadījumā iegūstam $n=69,\ k=7$.

Tātad nodzēsa skaitli 7.

35. 10. *Z* bija iedomājies skaitļus 8 un 9.

35.11. Pārveidojam doto vienādojumu

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x\cos^2 x = 0.$$

Atbilde: $x = k \cdot 90°, \quad k \in Z$.

35.12. Jāpārgriež četras šķautnes.

Tiešām, ja mēs pārgriezīsim 4 šķautnes, kas iet vienā virzienā (paralēlas), tad ne no vienas kuba virsotnes nevarēs nokļūt uz pretējo.

Ja pārgriežam tikai 3 šķautnes, tad atradīsies divas pretējās virsotnes, kas ir savienotas. To pierāda, aplūkojot atsevišķus gadījumus.

35.13. a) Ja cilvēks *A* ir pazīstams ar cilvēku *B*, tad cilvēks *B* ir pazīstams ar cilvēku *A*. Tāpēc kopējai paziņu skaita summai ir jābūt pāra skaitlim, bet pirmajā gadījumā šī summa ir nepāra skaitlis.

b) Apzīmēsim cilvēkus ar burtiem un iekavās pierakstīsim to paziņu skaitu.
$A(9), B(9), C(9), D(8), E(8), F(8), G(7), H(6), I(4), J(4).$

Tā kā *A*, *B* un *C* ir pazīstami ar visiem grupas cilvēkiem, tad 3 no *I* un *J* paziņām ir *A*, *B* un *C*. *I* un *J* katrs no pārējiem cilvēkiem pazīst tikai vienu cilvēku. Tātad vienu no trim cilvēkiem *D*, *E*, *F* nepazīst ne *I*, ne *J*. Šim cilvēkam nevar būt vairāk par 7 paziņām. Iegūta pretruna. Tātad arī šāda paziņu skaita konfigurācija nav iespējama.

35.14. Katras šādas četrstūra diagonāles galapunkti atrodas uz pretējām piramīdas šķautnēm. Izvēlēsimies šķautnes *CD* un *AB*, un pierādīsim, ka diagonāli, kuras galapunkti atrodas uz šīm šķautnēm var izvēlēties viennozīmīgi. Tiešām, šī diagonāle pieder plaknēm *CDM* un *ABM*; tātad ir šo plakņu šķēluma līnija.

Trijstūra piramīdai ir 3 pretēju šķautņu pāri. Katru no tām savieno nogrieznis, kas iet caur punktu *M*. Šie nogriežņi var būt prasīto četrstūru diagonāles. No tiem var izveidot 3 dažādus prasītos četrstūrus.

35.15. Tā kā $f(1) < f(2) < \cdots < f(1985) = 1985$ un visas šajā virknē izrakstītās *t* vērtības ir naturāli skaitļi, tad $f(1) = 1,\ f(2) = 2, \ldots,\ f(1985) = 1985$. Tātad $f(1000) = 1000$.

Pierādīsim, ka patvaļīgam naturālam n pastāv vienādība $f(n) = n$.

Ar matemātisko indukciju pierādīsim šādu faktu:
Ja $1 \le x \le 2^n$, tad $f(x) = x$.

Bāze seko no iepriekš pierādītā.

Pieņemsim, ka apgalvojums pierādīts pie $n = k$.

Ievērosim, ka $f\left(3\cdot 2^n\right)= f(3)\cdot f\left(2^n\right)=3\cdot 2^n$. Tāpat kā sākotnējā spriedumā, no šejienes seko, ka $f(x)=x$ pie $x=1, 2, 3,\cdots, 3\cdot 2^n$, tātad arī pie visiem x no 1 līdz 2^{n+1}. Induktīvā pāreja pierādīta.

Tā kā katrs naturāls skaitlis nepārsniedz kādu divnieka pakāpi, tad apgalvojums pierādīts.

35.16. Pieņemsim pretējo, ka $\log_{10} 11=\frac{m}{n}$, kur m un n – naturāli skaitļi. Tad

$$10^{\frac{m}{n}}=11 \quad\Leftrightarrow\quad 10^m=11^n.$$

Pēdējā vienādība ir pretrunīga, jo vienādības kreisās puses pēdējais cipars ir 0, bet labās puses pēdējais cipars ir 1.

35.17. Vienādība izpildās patvaļīgam trijstūrim.

35. 18. Šāda īpašība izpildās paralēlskaldnim un oktaedram.

35. 19. Katru no 5 skaitļiem izteiksim kā kāda leņķa tangensu, uzskatot, ka šie leņķi α atrodas intervālā $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Ja $x=\mathrm{tg}\alpha$ un $y=\mathrm{tg}\beta$, tad $\frac{x-y}{1+xy}=\mathrm{tg}(\alpha - \beta)$.

Starp pieciem leņķiem, kas atbilst dotajiem skaitļiem izvēlēsimies divus -- α un β, kuru starpība ir lielāka par 0 un mazāka par $\frac{\pi}{4}$. Tādi leņķi eksistē, jo starp pieciem leņķiem ir četras atstarpes, bet kopā tās veido ne vairāk kā leņķi π.

Izvēloties skaitļus a un b , kas atbilst leņķiem α un β, iegūstam

$$\frac{a-b}{1+ab}=\mathrm{tg}(\alpha - \beta).$$

Tā kā $0\le\alpha-\beta\le\frac{\pi}{4}$, tad $0<\frac{a-b}{1+ab}<1$.

35.20. Aplūkosim visas summas $aA+bB+cC$, kurām $|a|\le 9, |b|\le 9, |c|\le 9$. Šādu summu skaits ir $19^3=6859$.

Tā kā $|S|\le 3\cdot 9\cdot 100=2700$, tad , šīs summas var pieņemt 5401 dažādas vērtības.

Tā kā 5401 < 6859, tad vismaz divām summām $a_1A+b_1B+c_1C$ un $a_2A+b_2B+c_2C$ būs vienādas vērtības.

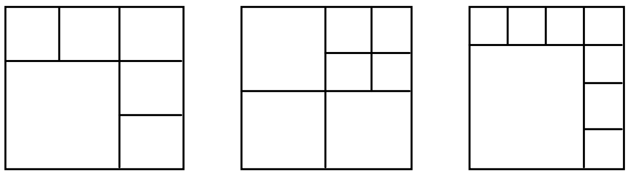
Izvēloties skaitļus $a=a_1-a_2, b=b_1-b_2, c=c_1-c_2$, uzdevuma nosacījumi izpildīsies.

35.21. Ja $b = 0$, der skaitļi $x_1 = a,\ x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Ja $b \neq 0$ un $b \neq 1$, der skaitļi $x, -bx, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x},$ kur $x = \frac{a}{1-b}$.

Ja $b = 1$, der skaitļi $-\frac{a}{3}, \frac{4a}{3}, \frac{3}{2a}, -\frac{3}{2a}$.

35.22. Kvadrātu var sagriezt četros, sešos, septiņos un astoņos kvadrātos. Gadījumi $n = 6, 7, 8$ parādīti 35.6. zīmējumā.



35.6. zīm.

Ja kvadrātu var sagriezt *k* kvadrātos, tad to var sagriezt arī $k + 3$ kvadrātos, vienu no *k* kvadrātiem sagriežot četros. No tā seko, ka kvadrātu var sagriezt *n* kvadrātos jebkuram naturālam $n \geq 6$.

Atsevišķi jāpierāda, ka kvadrātu nevar sagriezt 2, 3 un 5 kvadrātos.

35.23. Pāra skaitļus izsaka šādi:

$6k = 2 + 3 + (6k - 5)$,

$6k + 2 = 3 + 4 + (6k - 5)$,

$6k + 4 = 2 + 3 + (6k - 1)$.

Nepāra skaitļus izsaka šādi:

$12k + 1 = (6k - 7) + (6k - 1) + 9$,

$12k + 3 = (6k - 1) + (6k + 1) + 3$,

$12k + 5 = (6k - 5) + (6k + 1) + 9$,

$12k + 7 = (6k + 5) + (6k - 1) + 3$,

$12k + 9 = (6k - 1) + (6k + 1) + 9$,

$12k + 11 = (6k + 1) + (6k + 7) + 3$.

Viegli pārbaudīt, ka jebkuru divu skaitļu, kuri ierakstīti summās, lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

35. 24. Vispirms jāpierāda lemma.

Lemma. Pieņemsim, ka M ir trijstūra ABC malas BC viduspunkts, bet O – patvaļīgs leņķa BAC iekšējs punkts. Punkts O atrodas uz stara AM tad un tikai tad, kad $S_{ABO} = S_{ACO}$.

Izmantojot lemmu, no dotā seko, ka
$S_{OAE} = S_{OBA} = S_{OBC} = S_{ODC} = S_{ODE}$.
No vienādības $S_{OAE} = S_{ODE}$ seko, ka O pieder staram EE_1. Ko arī vajadzēja pierādīt.

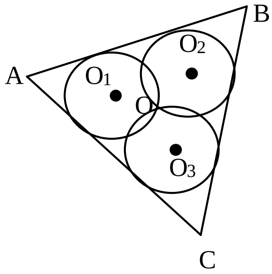
35.25. No dotā $f(2) - f(1) - f(1) \in \{0, 1\}$. Tā kā $f(2) = 0$ un $f(1) \geq 0$, tad $f(1) = 0$.
No īpašībām $f(3) - f(2) - f(1) \in \{0, 1\}$ un $f(3) > 0$ seko, ka $f(3) = 1$.
No vienādības $f(n+1) - f(n) - f(1) \in \{0, 1\}$ seko, ka $f(n)$ ir nedilstoša funkcija.
Tā kā $f(n+3) - f(n) - f(3) \in \{0, 1\}$ un $f(3) = 1$, tad $f(n+3) \geq f(n) + 1$.
No šīs nevienādības seko, ka $f(3k) \geq k$, tātad arī $f(9999) \geq 3333$.
Vienādība $f(9999) = 3333$ var izpildīties tikai, ja $f(3k) = k$ visiem $k \leq 3333$.
Tāpēc $661 \leq f(661 \cdot 3) \leq f(1985) \leq f(662 \cdot 3) = 662$.
Ja $f(1985) = 662$, tad $f(1985 \cdot 3) \geq f(1985 \cdot 2) + f(1985) \geq 3 \cdot f(1985) = 1986$ -- pretruna, jo $f(1985 \cdot 3) = 1986$.
Tātad $f(1985) = 661$.

35.26. Aplūkosim regulāru trijstūri ABC ar malas garumu $2a$. Aplūkosim 6 punktus – trijstūra virsotnes un tā malu viduspunktus. No 5 dotajiem trijstūriem vismaz vienam ir jāpārklāj divi no atzīmētajiem punktiem. Tā, kā attālums starp atzīmētajiem punktiem ir ne mazāks par a, tad pārklājošo trijstūru malas garums ir ne mazāks par a. Novelkot trijstūra ABC viduslīnijas, tas sadalās 4 regulāros trijstūros ar malas garumu a. Tātad trijstūri ABC var pārklāt ar 4 trijstūriem, kuru malas garums ir ne mazāks kā a.

35.27. Pierādīsim, ka visi virknes locekļi ir mazāki par 100. Tiešām, ja $x_n < 100$, tad skaitlim $1985 \cdot x_n$ ir ne vairāk par 6 cipariem, un tā ciparu summa x_{n+1} nepārsniedz $9 \cdot 6 < 100$. Tātad no kādas vietas virkne kļūs periodiska.

35.28. Apzīmēsim ievilktās riņķa līnijas centru ar I, apvilktās riņķa līnijas centru ar Q, bet trīs doto riņķu centrus ar O_1, O_2, O_3 (skat. 35.7. zīm). Tad $O_1O_2 \parallel AB$, $O_1O_3 \parallel AC$, $O_2O_3 \parallel BC$.
Tātad trijstūri ABC un $O_1O_2O_3$ ir homotētiski.; homotētijas centrs ir I, jo caur I iet trijstūra ABC bisektrises AO_1, BO_1 un CO_1. Homotētijā trijstūra atbilstošie punkti attēlojas par atbilstošajiem. Tātad O attēlojas par Q (jo O ir trijstūra

$O_1O_2O_3$ apvilktās riņķa līnijas centrs). Tā kā homotētijā ar centru punktā I punkts O attēlojas par Q, tad punkti I, O, Q atrodas uz vienas taisnes.



35.7. zīm.

35. 29. Vispirms parādīsim kā 2 draugi A un B var sadalīt divās daļās. A sadala torti divās (pēc viņa uzskatiem) vienādās daļās; pēc tam B izvēlas to daļu, kura pēc viņa uzskatiem ir vērtīgāka.

Tālāk gan A, gan B sadala savu tortes daļu 3 (pēc viņu uzskatiem) vienādās daļās un katrs atļauj C izvēlēties vienu no tām. Tagad katrs no draugiem uzskatīs, ka saņēmis ne sliktāku daļu kā pārējie.

35.30. Aplūkosim tabulu.

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

Par tabulas diagonālēm sauksim rūtiņu kopas, kurās ierakstīts viens skaitlis.

Tabulas katru rūtiņu nokrāsosim vienā no trim krāsām: baltā – ar varbūtību p, melnā – ar varbūtību q, sarkanā – ar varbūtību r. Tad

p^5 ir varbūtība, ka viena fiksēta rindiņa ir pilnīgi balta;

$1-p^5$ ir varbūtība, ka viena fiksēta rindiņa nav pilnīgi balta;

(a) $\left(1-\left(1-p^5\right)^5\right)$ ir varbūtība, ka kāda no tabulas rindiņām ir pilnīgi balta;

(b) $\left(1-\left(1-q^5\right)^5\right)$ ir varbūtība, ka kāda no tabulas kolonām ir pilnīgi melna;

(c) $\left(1-\left(1-r^5\right)^5\right)$ ir varbūtība, ka kāda no tabulas diagonālēm ir pilnīgi sarkana.

Notikumi $(a),(b),(c)$ ir nesavienojami, tāpēc to varbūtību summa ir mazāka par 1 (jo var arī neiestāties neviens no tiem). Summējot iegūstam prasīto nevienādību.

35.31. Skaitļus jāsakārto šādi : 1, 2, 4, 6, …, 1984, 1985, 1983, … , 7, 5, 3 (vai arī tos cikliski pārbīdot). To pierāda ar optimizācijas metodi, t.i., jebkuram citam skaitļu sakārtojumam norādām kā, pārkārtojot skaitļus vietām, dotās summas vērtību palielināt.

35.32. No ķīniešu teorēmas seko, ka eksistē tāds skaitlis *M*, kurš, dalot ar p_i^2, dod atlikumu $p_i - i$ (p_i -- *i*-tais pirmskaitlis), $i = 1, 2, 3, \ldots, 1985$.

Tad skaitlis $M + i$ dalās ar p_i , bet nedalās ar p_i^2, tātad nav naturāla skaitļa pakāpe ar kāpinātāju, kas lielāks par 1. Tātad skaitļi $M+1, M+2, \ldots, M+1985$ apmierina uzdevuma nosacījumus.

35.33. Norunāsim celt starp diviem zemes gabaliem sētu, ja tie piešķirti rūķīšiem, kuri sastrīdējušies. Vispirms piešķirsim rūķīšiem zemes gabalus kā pagadās. Pierādīsim šādu apgalvojumu: ja ir uzcelta kāda sēta α, kas atdala *A* un *B* zemes gabalus, tad *B* var apmainīt savu zemes gabalu ar citu rūķīti tā, ka sētu α var nojaukt, bet jaunas nav jāceļ.

Lai to varētu izdarīt, pietiekams, lai izpildītos šādi četri nosacījumi: rūķītis ar kuru mainās *B*,

a) nav *A*,
b) nav sastrīdējies ne ar vienu no tiem, kam pašreiz ir kopēja robeža ar *B*,
c) pašreiz neaizņem zemes gabalu, kam ir kopēja robeža ar *A*,
d) pašreiz neaizņem zemes gabalu, kam ir kopēja robeža ar citu no rūķīšiem, kas sastrīdējušies ar *B*.

Ievērosim, ka

a) nosacījumu varētu neapmierināt 1 rūķītis;
b) nosacījumu varētu neapmierināt 12 rūķīši;
c) nosacījumu varētu neapmierināt 4 rūķīši;
d) nosacījumu varētu neapmierināt 4·2 rūķīši.

Pie tam b) un c) nosacījumus neapmierina pats *B*. Tātad kaut vienu nosacījumu neapmierina ne vairāk kā $1+12+4+8-1=24$ rūķīši. Tā kā pavisam ir 25 rūķīši, tad eksistē tāds rūķītis, kurš var apmierināt visus nosacījumus. Ar to arī *B* mainās. Pakāpeniski izdarot šādas maiņas, tiek nojauktas visas sētas.

35.34. apzīmēsim ar $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ vienības vektorus, kas savieno sfēras centru ar piramīdas virsotnēm. Izmantojot vektoru algebru pierādām nevienādību
$\left|\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right| < 2$, no kuras viegli iegūt prasīto nevienādību.

35.35. a) Skaidrs, ka virkne ir augoša. Ja tā būtu ierobežota, tad pēc Veijerštrāsa teorēmas tai eksistētu robeža *c*. Pārejot dotajā vienādībā uz robežu, mēs iegūtu vienādību $c = c + \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = 0$, bet tas nav iespējams.

b) Tā kā $x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2} > x_n^2 + 2$, tad $x_2^2 > 3, x_3^2 > 5, x_4^2 > 7, \ldots, x_{1000}^2 > 1999$ un $x_{1000} > .\sqrt{1999} > 44$.