

Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 35. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

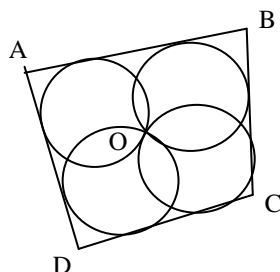
8. klase

35.1 Atrisināt vienādojumu

$$\sqrt[4]{x + \sqrt{2x - 1}} = 2.$$

Atbildi centieties pierakstīt parastajā decimālajā pierakstā, neizmantojot pakāpes, saknes zīmes utt.

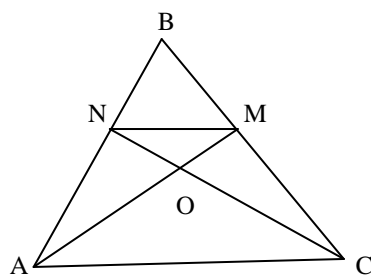
35.2. Četras riņķa līnijas ar vienādiem rādiusiem krustojas vienā punktā O . Četrstūra $ABCD$ malas katra pieskaras divām riņķa līnijām (35.1.zīm.). Pierādīt, ka ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju.



35.1. zīm.

35.3. Trijstūrī ABC novilkta nogriežņi AM un CN , kas krustojas punktā O . Dots, ka trijstūra AON laukums ir S_1 , trijstūra MOC laukums ir S_2 , bet trijstūra AOC laukums ir S_3 (35.2.zīm.).

1. Pierādīt, ka trijstūra MON laukums ir $\frac{S_1 \cdot S_2}{S_3}$.
2. Aprēķināt trijstūra ABC laukumu.



35.2. zīm.

35.4. Doti 1985 dažādi akmeņi, kuru svars ir 1 kg, 2 kg, 3 kg, ..., 1984 kg, 1985 kg. Vai tos var sadalīt 5 kaudzītēs tā, lai akmeņu skaits visās kaudzītēs būtu vienāds un visu kaudžu svars arī būtu vienāds?

35.5. Uz tāfeles uzrakstīti 12 skaitļi

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \dots \quad \frac{1}{11} \quad \frac{1}{12}.$$

- Pierādīt, ka nevar katram skaitlim priekšā pierakstīt “+” vai “-” zīmi tā, lai iegūtās summas vērtība būtu 0.
- Kādu mazāko daudzumu skaitļu jānodzēš, lai, atlikušajiem priekšā pierakstot “+” vai “-” zīmes, varētu iegūt summu 0?

9. klase

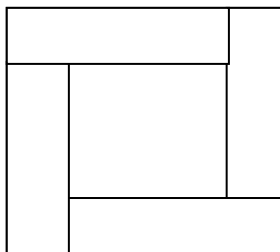
35.6. Izliektā četrstūrī $ABCD$ malas BC un AD ir paralēlas. Ir zināms, ka uz četrstūra malām un tā diagonālēm var izvēlēties virzienus (pārvēršot malas un diagonāles par vektoriem) tā, ka iegūto 6 vektoru summa ir $\vec{0}$. Kāda var būt malu BC un AD garumu attiecība?

35.7. Funkcija $f(x)$ definēta visām reālām x vērtībām. Zināms, ka $f(1) = 0$ un visiem x un y ir spēkā vienādība

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

Noteikt funkciju $f(x)$. (Mēģiniet atrast visas iespējas un pierādīt, ka citu bez atrastajām nav.)

35.8. Kvadrāts sagriezts 5 taisnstūros, kā parādīts 35.3. zīmējumā. Zināms, ka to četru taisnstūru laukumi, kas piekļaujas kvadrāta malām, ir vienādi. Pierādīt, ka iekšējais taisnstūris ir kvadrāts.



35.3. zīm.

35.9. Uz tāfeles uzrakstīja visus naturālos skaitļus no 1 līdz n , katru vienu reizi. Pēc tam vienu nodzēsa. Atlikušo skaitļu vidējais aritmētiskais ir $\frac{602}{17}$. Kādu skaitli nodzēsa?

35.10. Ap galdu sēž matemātiķi Z , A un B . Matemātiķis Z saka: “Es esmu iedomājies divus naturālus skaitļus (varbūt vienādus). To summa ir” (iečukst ausī matemātiķim A), “bet to kvadrātu summa ir” (iečukst ausī matemātiķim B). Pēc tam starp B un A notiek šāda saruna.

B : “Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus.”

A : “Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus.”

B : “Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus.”

A : “Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus.”

B : “Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus.”

A : “Es nezinu un nevaru zināt iedomātos skaitļus.”

B : “Tagad es zinu iedomātos skaitļus.”

Kādus skaitļus Z iedomājies? (Visi sarunā izdarītie apgalvojumi ir patiesi.)

10. klase

35.11. Atrisināt vienādojumu

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1.$$

35.12. Kāds mazākais skaits kuba šķautņu jāpārgriež, lai pa atlikušajām šķautnēm ne no vienas virsotnes nevarētu aiziet uz pretējo virsotni?

35.13. Istabā atrodas 10 cilvēki. Vai var gadīties, ka viņiem ir šāds paziņu skaits šajā istabā:

a) 9; 9; 9; 8; 8; 8; 7; 6; 4; 3;

b) 9; 9; 9; 8; 8; 8; 7; 6; 4; 4?

35.14. Dota trijstūra piramīda un punkts M tās iekšpusē. Pierādīt, ka uz piramīdas šķautnēm var izvēlēties 4 punktus tā, lai tie būtu tāda izliekta četrstūra virsotnes, kura diagonāles krustojas punktā M . Cik dažādos veidos var izvēlēties šos punktus?

35.15. Funkcija $f(x)$ definēta veselām pozitīvām x vērtībām, un tās vērtības arī ir veseli pozitīvi skaitļi. Zināms, ka vienlaikus ir spēkā šādas trīs īpašības:

1) $f(1) < f(2) < f(3) < \dots < f(n) < f(n+1) < \dots$, t.i., funkcija $f(x)$ ir stingri augoša;

2) $f(985) = 1985$;

3) ja veseliem pozitīviem skaitļiem m un k lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad $f(m \cdot k) = f(m) \cdot f(k)$.

Aprēķināt

a) $f(1000)$;

b) $f(3599)$;

c) $f(n)$ patvaļīgam pozitīvam n .

11. klase

35.16. Pierādīt, ka $\log_{10} 11$ ir iracionāls skaitlis.

35.17. a) Pierādīt, ka taisnleņķa trijstūrī ar leņķiem α , β un γ , ievilktais riņķa līnijas rādiusu r un apvilktais riņķa līnijas rādiusu R , pastāv sakarība

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + \frac{r}{R}.$$

b) Vai taisnība, ka šāda sakarība pastāv patvaļīgā trijstūrī?

35.18. a) Atrast kaut vai vienu daudzskaldni M ar šādu īpašību: lai kuru M skaldni izvēlētos, visiem M šķēlumiem ar plaknēm, kas paralēlas šai skaldnei, ir viens un tas pats perimetrs.

b) Atrast divas šādus daudzskaldņus ar dažādu skaldņu skaitu.

35.19. Doti 5 reāli skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus un x un y tā, lai būtu spēkā nevienādība

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < 1.$$

35.20. Dots, ka A , B un C ir naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 100. Pierādīt, ka var atrast tādus veselus skaitļus a , b un c , kas visi reizē nav 0, ka $aA + bB + cC = 0$. Turklāt jābūt spēkā nevienādībām $|a| \leq 18$, $|b| \leq 18$, $|c| \leq 18$.

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

8. un 9. klases

35.21. Dots, ka a un b ir racionāli skaitļi, pie tam $a \neq 0$. Pierādīt, ka var atrast tādus četrus racionālus skaitļus (starp tiem var būt arī vienādi), kuru summa ir a , bet reizinājums ir b .

35.22. Cik kvadrātos var sagriezt kvadrātu?

35.23. Pierādīt, ka katru naturālu skaitli, kas lielāks par 17, var izsacīt kā triju tādu naturālu skaitļu summu, no kuriem katriem diviem lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

35.24. Izliektā piecstūrī $ABCDE$ apzīmējam ar A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 attiecīgi diagonāļu EB, AC, BD, CE, DA viduspunktus. Dots, ka taisnes AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 krustojas punktā O . Pierādīt, ka arī taisne EE_1 iet caur punktu O .

35.25. Funkcijas $f(x)$ argumenta x vērtības var būt naturāli skaitļi $1; 2; 3; \dots$, bet $f(x)$ vērtības ir nenegatīvi veseli skaitļi. Dots, ka $f(2) = 0$, $f(3) > 0$, $f(9999) = 3333$. Bez tam dots, ka katriem diviem naturāliem skaitļiem m un n (varbūt $m = n$) izteiksmes $f(m+n) - f(n) - f(m)$ vērtība ir 0 vai 1. Aprēķināt $f(1985)$.

10. klase

35.26. Regulārs trijstūris S pilnīgi pārklāts ar pieciem mazākiem vienādiem regulāriem trijstūriem (mazie trijstūri varbūt pārsedz arī kādu plaknes daļu ārpus S). Pierādīt, ka S var pārklāt ar četriem tāda paša izmēra regulāriem trijstūriem.

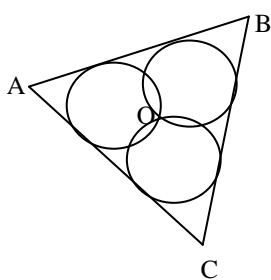
35.27. Skaitļu virkni (x_n) veido šādi:

a) $x_1 = 1$;

b) ja $k \geq 1$, tad x_{k+1} ir skaitļa $1985 \cdot x_k$ ciparu summu.

Pierādīt, ka, sākot no kādas vietas, virkne (x_n) kļūst periodiska.

35.28. Trīs vienādas riņķa līnijas krustojas viena punktā O . Trijstūra ABC malas katra pieskaras divām riņķa līnijām (35.4. zīm.). Pierādīt, ka trijstūrī ABC ievilktais riņķa līnijas centrs, trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centrs un punkts O atrodas uz vienas taisnes.



35.4. zīm.

35.29. Trīs draugi nopirkuši torti. Katram no viņiem ir savs ieskats par dažādu tortes daļu vērtību; domas ir tik dažādas, ka izsacīt atsevišķu daļu vērtību ar vienotu kritēriju, piemēram, naudā, nav iespējams.

Kā viņiem sadalīt torti, lai katrs uzskatītu, ka neviens cits nav saņēmis vērtīgāku daļu nekā viņš?

35.30. Dots, ka p , q un r ir pozitīvi skaitļi un $p + q + r = 1$. Pierādīt nevienādību $(1 - p^5)^5 + (1 - q^5)^5 + (1 - r^5)^5 > 2$.

11. klase

35.31. Kā piešķirt skaitļiem $x_1; x_2; x_3; \dots; x_{1985}$ vērtības $1; 2; 3; \dots; 1985$ (katram skaitlim – citu vērtību) tā, lai izteiksmes $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + \dots + x_{1984} x_{1985} + x_{1985} x_1$ vērtība būtu lielākā iespējamā?

35.32. Pierādīt, ka eksistē 1985 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi, no kuriem neviens nav naturāla skaitļa pakāpe, augstāka par pirmo.

35.33. Ziedu pilsētā ir 25 dārziņi; tie ir kvadrāti ar izmēriem 1×1 un kopā veido lielu kvadrātu ar izmēriem 5×5 . Dārziņi jāpiešķir 25 rūķīšiem. Katrs no viņiem sastrīdējušies ar ne vairāk kā trim. Pierādīt, ka dārziņus var piešķirt tā, lai nekādiem diviem rūķīšiem, kas sastrīdējušies, nebūtu piešķirti dārziņi ar kopēju malu.

35.34. Sfērā, kuras rādiuss ir 1, ievilkta trijstūra piramīda; sfēras centrs atrodas piramīdas iekšpusē. Pierādīt, ka piramīdas šķautņu garumu summa ir lielāka par 6.

35.35. Skaitļu virkni (x_n) veido pēc likuma $x_1 = 1; \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$. Pierādīt, ka

a) šī virkne ir neierobežota;

b) $x_{1000} > 44$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$.