Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 36. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

36.1. Ja skaitlim *A* galā pieraksta skaitli *B*, iegūstam skaitli
$\overline{AB} = 1000A + B = 999A + (A + B)$.

Tā kā 999 dalās ar 37 un $A + B$ arī dalās ar 37, tad $\overline{AB}$ dalās ar 37.

36.2. Vienādību pārveidojam formā

$$2^{3a+d} \cdot 3^{a+3c+d} \cdot 5^{2b+d} = 1.$$

Redzam, ka jāatrod tādi veseli skaitļi *a*, *b*, *c*, *d*, kuriem izpildās vienādības

$$\begin{cases} 3a + d = 0 \\ a + 3c + d = 0 \\ 2b + d = 0. \end{cases}$$

Atrisinot šo vienādojumu sistēmu, iegūstam bezgalīgu atrisinājumu sistēmu
$a = -6k,\ b = -9k,\ c = -4k,\ d = 18k$.

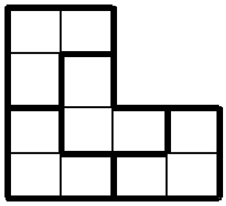
36.3. Pārveidojam vienādību par kvadrātvienādojumu attiecībā pret *x*:

$$x^2 + (y+1)x + (y^2 - y + 1) = 0 .$$

Tā diskriminants $D = -3(y-1)^2 \le 0$. Tā kā *x* – reāls skaitlis, tad jābūt $D = 0$, tātad $y = 1$. No šejienes $x = -1, \quad xy = -1$.

36.4. Savienosim trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centru ar tās pieskaršanās punktiem. Trijstūris tiek sagriezts trijos četrstūros. Katram no šiem četrstūriem divi pretējie leņķi ir taisni; tātad ap katru no tiem var apvilkt riņķa līniju.

36.5. Varam uzskatīt, ka figūra *B* iegūta no figūras *A*, vispirms katru rūtiņu sagriežot četrās mazākās rūtiņās un pēc tam to palielinot divas reizes. Pieņemsim, ka no *B* izgriezta 1 rūtiņa. Tā izgriezta no kāda 2×2 -rūtiņu kvadrāta. Atlikusī šī kvadrāta daļa veido “stūrīti”. Izgriežam to no *B*. Atlikusī *B* daļa sastāv no 2×2 -rūtiņu kvadrātiem, kas savā starpā izvietoti tāpat kā rūtiņas figūrā *A*, no kuras izgriezta viena rūtiņa. Tāpēc atlikušo *B* daļu var sagriezt “divreiz palielinātos stūrīšos”, katru no kuriem var sagriezt parastajos stūrīšos (skat. 36.3. zīm.).



36.3. zīm.

36.6. Acīmredzot, visi virzienu izvēles varianti uz diagonālēm ir līdzvērtīgi. Uzskatīsim, ka izvēlēti vektori $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$. To summu var aizstāt ar $2\overrightarrow{AB}$. Virzienu izvēle uz *AB* un *DC* ietekmē summas vektora komponenti *AB* virzienā, bet virzienu izvēle uz *AD* un BC – komponenti *AD* virzienā. Ņemot vektorus $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{DC}$, iegūstam pirmās komponentes maksimālo garumu 4*a*. Otrās komponentes maksimālo garumu 2*a* iegūstam, ņemot vektorus $\overrightarrow{AD}$ un $\overrightarrow{BC}$. Tātad summas vektora lielākais garums ir $\sqrt{(4a)^2+(2a)^2}=2\sqrt{5}a$. Mazāko garumu – 0 var iegūt, izvēloties vektorus $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AD}$ un $\overrightarrow{CB}$.

36.7. a) ar matemātisko indukciju viegli pierādīt, ka visiem naturāliem *n* izpildās nevienādība $1 \le x_n \le 2$. Tātad virkne ir ierobežota.

b) No dotās vienādības seko

$$x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n-x_{n+1}).$$

No šejienes iegūstam

$$x_2-x_1=1,\quad x_3-x_2=-\frac{1}{2},\quad x_4-x_3=\frac{1}{4},\ldots,\quad x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{(-1)^n}{2^n}.$$

$$x_{n+2}=x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_{n+2}-x_{n+1})=$$

$$1+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)$$

Tā kā iekavās ierakstīta dilstošas ģeometriskās progresijas summa, tad

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+2}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}.$$

36.8. Taisnes *QS*, *FR*, *LM* krustojas vienā punktā. Izpildot centrālo projekciju ar centru punktā *D* uz plakni *ABC*, tās attēlojas par taisnēm *QC*, *PB* un *LA*. Tātad šīs taisnes arī krustojas vienā punktā.

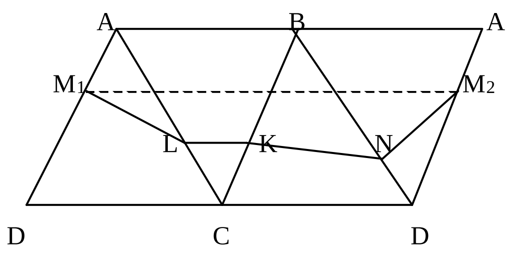
36.9. Pieņemsim pretējo, ka $f(x)$ ir nepārtraukta funkcija. No dotās vienādības seko, ka $f(x+1) \neq 0$. Tātad dotā funkcija ir vai nu visām *x* vērtībām pozitīva, vai nu visām *x* vērtībām negatīva. Pirmais gadījums ir pretrunā ar doto vienādību.

Aplūkosim otru gadījumu. No vienādības $f(x+1) = -\frac{1}{f(x)+1}$ un nevienādības $f(x+1) < 0$ seko, ka $f(x)+1 > 0$. Tātad visiem x izpildās $-1 < f(x) < 0$. Taču $f(x+1) = -1 - f(x+1)f(x) < -1$. Iegūta pretruna.

36.10. Konferencē piedalījās 40 dalībnieki. Lielākais rokasspiedienu skaits, kāds varēja būt izdarīts, ir 38. Ilīrijas prezidents saņēma 39 atšķirīgas atbildes, t.i. tika nosaukti visi skaitļi no 0 līdz 38.
Pieņemsim, ka valsts A_1 prezidents izdara 38 rokasspiedienus. Tas nozīmē, ka visi pārējie dalībnieki, izņemot valsts A_1 premjerministru, ir izdarījuši vismaz 1 rokasspiedienu. Tātad vienīgais cilvēks, kurš ir izdarījis 0 rokasspiedienu, var būt tikai A_1 premjerministrs. Analoģiski spriežot, redzam, ka
valsts A_2 prezidents un premjerministrs izdarījusi 37 un 1 rokasspiedienus,
valsts A_3 prezidents un premjerministrs izdarījusi 36 un 2 rokasspiedienus,
valsts A_4 prezidents un premjerministrs izdarījusi 35 un 3 rokasspiedienus, …
valsts A_{19} prezidents un premjerministrs izdarījusi 20 un 18 rokasspiedienu,
Bez pāra ir atlicis tikai Ilīrijas prezidents, kurš, tātad, ir izdarījis 19 rokasspiedienus.

36.11. Vienādojums pārveidojas par
$$\frac{1}{2\cos x} = \frac{\cos x}{2\cos^2 x - 1}$$
un tālāk par $0 = 1$. Tātad tam nav atrisinājumu.

36.12. Uzzīmēsim piramīdas skaldnes plaknē tā, kā parādīts 36.4. zīmējumā.



36.4. zīm.

Redzams, ka šķēluma *MLKN* perimetrs $M_1L + LK + KN + NM_2 \leq M_1M_2 = 2$.

36.13. Pieņemsim pretējo, ka *ABC* nav regulārs trijstūris un *AB* ir tā garākā mala. Tad $AB \geq AC$ un $AB \geq BC$, pie tam vismaz viena no nevienādībām ir stingra. Apskatīsim riņķa līnijas ar centriem *M* un *N* (tie ir attiecīgi malu *AC* un *CB* viduspunkti). Ja tām būtu kopīgs punkts *X*, tad no trijstūra nevienādības sekotu

$$\frac{1}{2}AB = MN \leq MX + XN = \frac{1}{4}(AC + BC) < \frac{1}{4}(AB + AB) = \frac{1}{2}AB.$$

Iegūta pretruna. Tātad dotais trijstūris ir regulārs.

36.14. Ja $b = 0$, tad no pirmā vienādojuma iegūstam $a = \pm 1$. Tātad jāaplūko tikai parametra *a* vērtības $a = \pm 1$.

Ja $a = 1$, tad no otrā vienādojuma $y = 1$, un pirmais vienādojums pārveidojas formā

$$2^{bx} + 2b = 1.$$

Tam nav atrisinājumu, piemēram, ja $b = 1$. Tātad *a* vērtība 1 neder.

Ja $a = -1$, tad iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2^{bx} = 1 \\ -2x^3 + y^3 = 1, \end{cases}$$

kurai vienmēr eksistē atrisinājums $x = 0,\ y = 1$. Tātad vienīgā parametra *a* vērtība, kurai izpildās uzdevuma nosacījumi ir $a = -1$.

36.15. Pirmais spēlētājs pirmajā gājienā ieraksta reizināšanas zīmes starp 1 un 2. Veidojas 1985 skaitļi (pamīšus iet pāra un nepāra skaitļi). Katram nepāra skaitlim abās pusēs atrodas divas atstarpes. Lai kādu zīmi vienā no šīm atstarpēm ieraksta otrais spēlētājs, pirmais spēlētājs otrajā atstarpē ieraksta reizināšanas zīmi. Rezultātā katrs no nepāra skaitļiem būs sareizināts ar kādu no pāra skaitļiem, un visu skaitļu summa būs pāra skaitlis.

36.16. Aplūkojam 3 gadījumus, kad taisne krusto divas katetes, hipotenūzu un garāko kateti, hipotenūzu un īsāko kateti. Tikai otrajā gadījumā eksistē atrisinājums, un tas ir vienīgais.

36.17. Vienādojumu pārveidojam formā

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = (2y+1)^2 + 2,$$

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) = (2y+1)^2 + 2.$$

Vienādības kreisās puses izteiksme nepārsniedz $\sqrt{2}$, bet labās puses izteiksme ir ne mazāka par 2. Tā kā $\sqrt{2} < 2$, tad vienādojumam nav atrisinājumu.

36.18. Ar M un N apzīmēsim dotā kuba $ABCDA_1B_1C_1D_1$ šķautņu viduspunktus. Trijstūra piramīdai ar šķautnes garumu 1 attālums starp pretējām šķautnēm ir $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tāds pats attālums ir starp taisnēm AA_1 un MN (Pamatojiet to) . Tāpēc pirmās trijstūra piramīdas divas virsotnes var izvēlēties kā A un A_1, bet pārējās divas uz nogriežņa MN. Otrās piramīdas divas virsotnes izvēlāmies kā C un C_1, bet pārējās divas uz nogriežņa MN.

36.19. Ievietosim m un n vietā dažādas vērtības.

1) $m = n = 1$; tad $f(0) + f(0) = f(0)$, tātad $f(0) = 0$.

2) $m = n$; tad $f(3m) = f(2n) + f(0) = f(2n)$.

3) $m = 3n$; tad

$f(4n) + f(2n) = f(9n) = f(3 \cdot 3n) = f(2 \cdot 3n) = f(3 \cdot 2n) = f(2 \cdot 2n) = f(4n)$.

Tāpēc $f(2n) = 0$ un arī $f(3n) = 0$.

4) $n = 0$; tad $f(m) + f(m) = f(3m) = 0$,

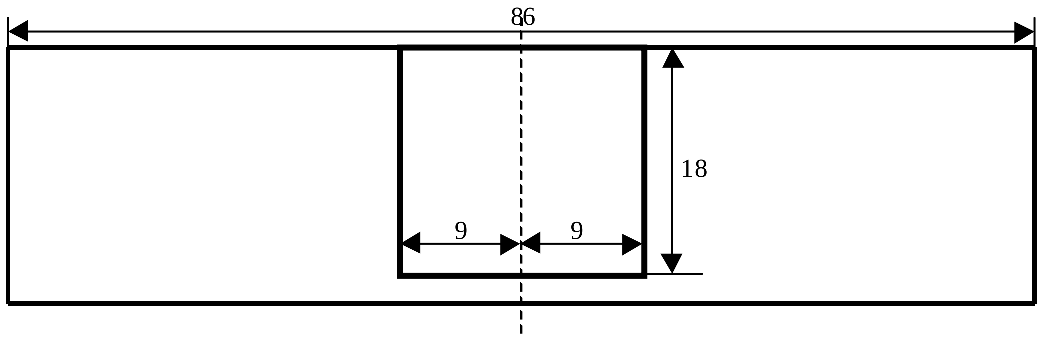
Tātad $f(m) = 0$ visiem veseliem m.

36.20. Sauksim skaitļu pāri (l, k) par "labu", ja l dalās ar k.

Abās vienādības pusēs aprēķināts "labo" pāru skaits, ja $1 \le l, k \le n$. Tātad šie skaitļi sakrīt.

36.21. Parādīsim, kā jārīkojas pirmajam spēlētājam, lai viņš uzvarētu.

Pirmajā gājienā viņš iekrāso kvadrātu ar izmēriem 18×18 rūtiņas, kas novietots simetriski attiecībā pret taisnstūra simetrijas asi, kas paralēla īsākajai malai (skat. 36.5. zīm.). Pēc tam iespējams iekrāsot tikai kvadrātus, kas pilnībā atrodas vienā pusē no simetrijas ass. Ja otrais spēlētājs iekrāso kādu kvadrātu, pirmais nākošajā gājienā iekrāso tam simetrisku (pret atzīmēto asi) kvadrātu. Līdz ar to pirmajam spēlētājam vienmēr būs iespējams izdarīt gājienu pēc otrā spēlētāja gājiena.



36.5. zīm.

36.22. Pierāda, ka trijstūru $A_1B_1C_1$ un $A_2B_2C_2$ atbilstošie leņķi ir vienādi. No tā seko atbilstošo trijstūru līdzība.

36.23. Aplūkosim vairākus gadījumus:

1) $p = 2$; tad $2^2 + 2^2 = 8$ nav pirmskaitlis.

2) $p = 3$; tad $2^3 + 3^2 = 17$ ir pirmskaitlis.

3) $p > .3$; tad

$$2^p + p^2 \equiv 2^{2k+1} + (\pm 1)^2 \equiv 4^k \cdot 2 + 1 \equiv 1^k \cdot 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3,$$

un skaitlis $2^p + p^2$ nav pirmskaitlis.

Tātad vienīgā p vērtība, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir $p = 3$.

36.24. Dotā četrstūra laukumu var izteikt formā

$$L = S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{BOA} + S_{COB} + S_{DOC} =$$
$$\frac{1}{2}\left(OA \cdot OD \sin\angle AOD + OB \cdot OA \sin\angle BOA + OC \cdot OB \sin\angle COB + OD \cdot OC \sin\angle DOC\right) \leq$$
$$\frac{1}{2}\left(OA \cdot OD + OB \cdot OA + OC \cdot OB + OD \cdot OC\right) \leq$$
$$\frac{1}{2}\left(OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2\right).$$

(Pēdējā nevienādība seko no nevienādībām starp skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko).

Tā kā jāizpildās vienādībai, tad jābūt

$\angle AOD = \angle BOA = \angle COB = \angle DOC = 90°$ un $OA = OB = OC = OD$.

Tas iespējams tikai, ja *ABCD* ir kvadrāts un *O* – tā centrs.

36.25. Apzīmēsim dalībnieku skaitu ar $n+1$ un čempiona uzvaru skaitu ar *k*. Tad $0{,}68n < k < 0{,}69$.

Pārveidojot, iegūstam

$$-0{,}68n > -k > -0{,}69 \quad \Leftrightarrow \quad n-0{,}68n > n-k > n-0{,}69n \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}31n < n-k < 0{,}32n$$

Tātad

$$0{,}62n < 2(n-k) < 0{,}64n < 0{,}68n < k < 0{,}69n .$$

Tas nozīmē, ka starp skaitļiem $0{,}62n$ un $0{,}69n$ atrodas divi dažādi veseli skaitļi $2(n-k)$ un *k*. Tātad $0{,}69n - 0{,}62n > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}07 > 1$ un $n \geq 15$.

Ja $n = 15$, tad ievērosim, ka $\frac{10}{15} < 0{,}68$, bet $\frac{11}{15} > 0{,}69$; tātad $n = 15$ neder. Līdz ar to mazākā iespējamā *n* vērtība ir 16, un turnīra dalībnieku skaits nav mazāks par 17.

Turnīrs ar 17 dalībniekiem, kas apmierina uzdevuma prasības ir iespējams. Tiešām, ņemot vērā, ka $\frac{11}{16} = 0{,}6875$, mums tikai jāuzrāda turnīrs, kura čempionam ir 11 uzvaras.

36.26. Tā kā visiem $n \geq 3$ reizinājums $p_1 p_2 p_3 \ldots p_n$ dalās gan ar 2, gan ar 3, tad $p_1 p_2 p_3 \ldots p_n + 1$ nedalās ne ar 2, ne ar 3; tātad visi pirmskaitļi, ar kuriem dalās $p_1 p_2 p_3 \ldots p_n + 1$ ir ne mazāki par 5.

Pieņemsim pretējo, ka $p_{k+1} = 5$. Tad $p_1 p_2 p_3 \ldots p_k + 1 = 5^l$. Taču tādā gadījumā $p_1 p_2 p_3 \ldots p_k = 5^l - 1$ dalās ar 4, bet tas nav iespējams, jo starp skaitļiem $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ir tikai viens pirmskaitlis 2.

36.27. To var izdarīt. Katru studentu apzīmēsim ar veselu skaitļu trijnieku (a, b, c), kur $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$. Šādu trijnieku skaits ir tieši 27. Vienā komisijā apvienosim tādus trīs studentus, kuriem

$$a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0 \pmod 3,$$
$$b_1 + b_2 + b_3 \equiv 0 \pmod 3,$$
$$c_1 + c_2 + c_3 \equiv 0 \pmod 3.$$

Viegli pārbaudīt, ka šādām komisijām izpildās uzdevuma nosacījumi. Tiešām, ja mēs izvēlamies divus studentus, tad no dotajām kongruencēm mēs viennozīmīgi nosakām treša studenta koordinātes, kurš ir vienā komisijā ar pirmajiem diviem. Aprēķiniet komisiju skaitu.

36.28. Uzdevuma apgalvojumu pierāda ar matemātisko indukciju.

Bāze ir acīmredzama.

Induktīvā pāreja. Pieņemsim, ka $\left|x_k - \sqrt{2}\right| < 2^{-k}$. Tad

$$x_{k+1} - \sqrt{2} = \left|1 + x_k - \frac{1}{2}x_k^2 - \sqrt{2}\right| = \frac{1}{2}\left|x_k - \sqrt{2}\right| \cdot \left|2 - \sqrt{2} - x_k\right| < \frac{1}{2}\left|x_k - \sqrt{2}\right| < 2^{-(k+1)}.$$

Apgalvojums pierādīts.

36.29. Skat 36.6. zīm.

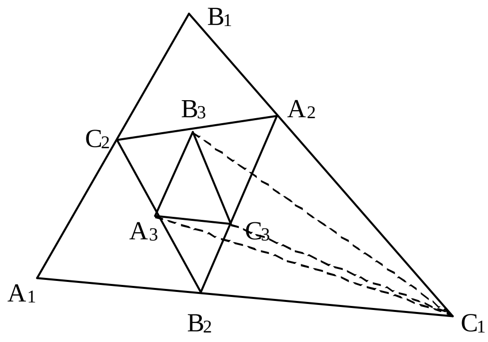
Apzīmēsim figūras laukumu ar $[ABC]$. Ievērosim, ka

$$L_2 = [C_2A_3B_3] + [B_2A_3C_3] + [A_2B_3C_3] + [A_3B_3C_3] =$$
$$[C_2A_3B_3] + [C_1A_3C_3] + [C_1B_3C_3] + [A_3B_3C_3] =$$
$$[C_2A_3B_3] + [A_3B_3C_1] = \frac{1}{2}A_3B_3 \cdot h,$$

kur h ir trijstūra $A_1B_1C_1$ augstums pret malu A_1B_1. Apzīmēsim ar h_3 trijstūra $A_3B_3C_3$ augstumu pret malu A_3B_3. Tad $\frac{A_3B_3}{h_3} = \frac{A_1B_1}{h}$. No šejienes seko, ka

$$L_2 = \frac{1}{2}A_3B_3 \cdot h = \sqrt{\frac{1}{2}A_3B_3 \cdot h \cdot \frac{1}{2}A_3B_3 \cdot h} = \sqrt{\frac{1}{2}A_3B_3 \cdot h \cdot \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot h_3} =$$
$$\sqrt{\frac{1}{2}A_1B_1 \cdot h \cdot \frac{1}{2}A_3B_3 \cdot h_3} = \sqrt{L_1L_3}$$

Kāpinot vienādību kvadrātā, iegūstam prasīto.



36.6. zīm.

36.30. Aplūkosim patvaļīgu kvadrātu ar malas garumu n rūtiņu lapā. Ar M apzīmēsim punktu kopas izliekto apvalku, kas atrodas kvadrāta iekšpusē vai uz tā malām. Uzskatīsim, ka M iekšpusē atrodas x punkti, bet uz tā kontūra y punkti. No Pīka formulas seko, ka

$$x + \frac{y}{2} - 1 = S_M \le n^2 .$$

Tā kā *M* ir izliekts daudzstūris, kas atrodas kvadrāta $n \times n$ iekšpusē, tad tā perimetrs nepārsniedz 4*n*. Tā kā attālumi starp režģa punktiem nav mazāki par 1, tad $y \le 4n$. Tāpēc

$x + y = \left(x + \frac{y}{2} - 1 \right) + \frac{y}{2} + 1 \le n^2 + \frac{1}{2} \cdot 4n + 1 = (n+1)^2$, ko arī vajadzēja pierādīt.

36.31. Katru no piramīdas daļām sadala divās piramīdās – trijstūra un četrstūra. Pierāda, ka atbilstošo piramīdu tilpumi ir vienādi.

36.32. Ja $p = 2$, tad $2^p + 3^p = 13$.

Ja *p* ir nepāra pirmskaitlis, tad

$$2^p + 3^p \equiv 2^{2k+1} + (-2)^{2k+1} \equiv 2^{2k+1} - 2^{2k+1} \equiv 0 \pmod 5.$$

Atliek pierādīt, ka šis skaitlis nedalās ar 25.

Aplūkojot virknes $2^n + 3^n$ atlikumus pēc moduļa 25, redzam, ka tā ir periodiska ar periodu 20, un ar 25 šajā virknē dalās tikai skaitļi $2^n + 3^n$, kuriem $n = 5 + 10k$. Starp šādiem skaitļiem *n* tikai skaitlis 5 ir pirmskaitlis. Taču arī $2^5 + 3^5 = 275$ nav naturāla skaitļa pakāpe ar kāpinātāju, lielāku par 1.

36.33. Pieņemsim pretējo, ka

(1) $a_1 + a_3 > a_2\sqrt{3},$

(2) $a_2 + a_4 > a_3\sqrt{3},$

(3) $a_3 + a_5 > a_4\sqrt{3},$

(4) $a_4 + a_6 > a_5\sqrt{3},$

(5) $a_5 + a_7 > a_6\sqrt{3}.$

No (1) iegūstam, ka $a_3 > a_2\sqrt{3}$, no (2) , ka $a_2 + a_4 > 3a_2$; t.i., $a_4 > 2a_2$. Līdzīgi pierāda, ka $a_4 > 2a_6$. Tātad $a_4 > a_2 + a_6$.

Bet no (2) un (4) iegūstam $a_2 + 2a_4 + a_6 > (a_3 + a_5)\sqrt{3} > 3a_4 \quad \Rightarrow \quad a_2 + a_6 > a_4$. Iegūta pretruna.

36.34. Pieņem pretējo, un pierāda, ka kolonnas, kas nesatur plāksnītes, izvietotas pēc kārtas, un rindas, kuras nesatur plāksnītes, arī izvietotas pēc kārtas. Ar *a* apzīmēsim tukšo kolonnu skaitu, ar *b* – tukšo rindiņu skaitu. Uzskatīsim, ka $a, b \ge 1$ (atlikušais gadījums jāaplūko atsevišķi). Tā kā $a + b \ge 2n$, tad viens no skaitļiem (teiksim *a*) ir ne mazāks par n. Tā kā $b \geq 1$, tad ir tukša rindiņa. Tā kā $a \geq n$, tad šajā rindiņā var izvietot plāksnīti.

36.35. No katriem trim skaitļiem var izvēlēties divus, kuru summa ir pāra skaitlis. Tāpēc no 19 skaitļiem pakāpeniski var izvēlēties 9 skaitļu pārus, kuru summas ir pāra skaitļi. Tālāk atliek no šiem 9 pāriem izvēlēties 5 pārus, kuru summa dalās ar 5. To pierāda, aplūkojot dažādus gadījumus pēc moduļa 5.