Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 36. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

8. klase

36.1. Dots ka *A* un *B* ir divi naturāli trīsciparu skaitļi. To summa $A+B$ dalās ar 37. Pierādīt, ka sešciparu skaitlis, ko iegūst, uzrakstot *A* un *B* vienu otram galā, arī dalās ar 37.

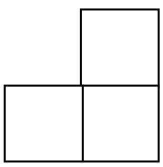
36.2. a) Atrast kaut vienu komplektu tādu veselu skaitļu *a*, *b*, *c* un *d*, ka $24^a \cdot 25^b \cdot 27^c \cdot 30^d = 1$.

b) Atrast divus dažādus tādus komplektus.

36.3. Dots, ka $(x+y)^2 = (x+1)(y-1)$. Atrast *x* un *y*. (Jāatrod visas iespējas un jāpierāda, ka citu bez atrastajām nav.)

36.4. Pierādīt, ka katru izliektu daudzstūri var sagriezt tādos četrstūros, ap katru no kuriem var apvilkt riņķa līniju.

36.5. Figūra *A* uzzīmēta uz rūtiņu lapas, un tās kontūra iet pa rūtiņu līnijām. Figūrai *A* piemīt šāda īpašība: lai kuru vienu rūtiņu no tās izgrieztu, atlikumu var sagriezt "stūrīšos", kas parādīti 36.1.zīmējumā (tie var būt novietoti arī citādi). Figūra *B* iegūta no figūras *A*, palielinot to divas reizes; *B* kontūra arī iet pa rūtiņu līnijām. Pierādīt, ka arī figūrai *B* piemīt iepriekš minētā īpašība.



36.1.zīm.

9. klase

36.6. Uz kvadrāta malām un diagonālēm jāizvēlas virzieni, pārvēršot tās par vektoriem. Kāds var būt iegūto 6 vektoru summas

a) mazākais garums;

b) lielākais garums?

36.7. Skaitļu virkne (x_n), $n = 1; 2; 3; \ldots$ definēta šādi:

$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n), \;$ ja $n \geq 1$.

a) Pierādīt, ka šī virkne ir ierobežota.

b) Aprēķināt $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

36.8. Dota trijstūra piramīda *ABCD* un punkti *P*, *Q*, *R* un *S*, kas ir attiecīgi šķautņu *AC*, *AB*, *BD* un *CD* iekšējie punkti. Taisnes *PR* un *QS* krustojas punktā *N*, bet taisnes *PS* un *QR* krustojas punktā *M*. Taisne *NM* krusto plakni *ABC* punktā *L*. Pierādīt, ka taisnes *AL*, *BP* un *CQ* krustojas vienā punktā.

36.9. Funkcija $f(x)$ definēta visiem reāliem *x*, un visiem *x* ir spēkā vienādība $f(x+1) \cdot f(x) + f(x+1) + 1 = 0$.

Pierādīt, ka $f(x)$ nevar būt nepārtraukta visos skaitļu ass punktos.

36.10. Starptautiskā konferencē piedalās 20 valstu delegācijas. Katrā delegācijā ir prezidents un premjerministrs. Pirms konferences sākuma daži tās dalībnieki apmainījās ar rokasspiedieniem. Turklāt neviens prezidents nespieda roku savam premjerministram un nekādi divi cilvēki nesarokojās vairāk kā vienu reizi.

Kad Smaragda pilsētas prezidents pajautāja visiem citiem konferences dalībniekiem, cik rokasspiedienu tie izdarījuši, visas saņemtās atbildes bija dažādas.

Cik rokasspiedienu izdarīja Smaragda pilsētas premjerministrs?

10. klase

36.11. Atrisināt vienādojumu

$$\frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{\cos 2x}.$$

36.12. Trijstūra piramīdas visu šķautņu garumi ir 1. Piramīda tiek šķelta ar plakni un šķēlumā iegūts četrstūris. Pierādīt, ka tā perimetrs nav mazāks par 2.

36.13. Dots trijstūris *ABC*. Ap katras malas viduspunktu kā centru konstruēta riņķa līnija, kuras diametrs vienāds ar pusi no attiecīgās malas garuma. Dots, ka katrām divām konstruētajām riņķa līnijām ir kopīgs punkts. Pierādīt, ka *ABC* ir regulārs trijstūris.

36.14. Dota vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2 \\ (a-1)x^3 + y^3 = 1, \end{cases}$$

kur a un b – parametri, bet x un y – mainīgie.
Kādas ir tās parametra a vērtības, ar kurām sistēmai eksistē atrisinājums katrai parametra b vērtībai?

36.15. Uz lapas rindā uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 1986: 1 2 3 … 1985 1986. Divi spēlētāji pēc kārtas ieraksta pa vienai "+", "-" vai "×" zīmei kādā brīvā vietā starp blakus uzrakstītajiem skaitļiem. Spēle beidzas, kad ierakstītas visas 1985 zīmes.
Pierādīt, ka spēlētājs, kas izdara pirmo gājienu, var panāk, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu pāra skaitlis.

11. klase

36.16. Trijstūra malu garumi ir 6 cm, 8 cm un 10 cm. Pierādīt, ka eksistē tieši viena taisne, kas dala uz pusēm gan trijstūra laukumu, gan perimetru.

36.17. Atrisināt vienādojumu

$$\sin x + \cos x = 4y^2 + 4y + 3.$$

36.18. Kuba šķautnes garums ir 1. Vai tajā var ievietot divas tādas trijstūra piramīdas, kurām katras šķautnes garums ir 1? (Piramīdas drīkst pieskarties kuba robežai un savā starpā, bet tām nedrīkst būt kopīgi iekšējie punkti.)

36.19. Funkcija $f(x)$ definēta veseliem x. Zināms, ka katriem diviem veseliem skaitļiem m un n pastāv vienādība $f(m+n) + f(m-n) = f(3m)$. Atrast funkciju $f(x)$.

36.20. Ar $d(k)$ apzīmējam naturāla skaitļa k dažādu veselo pozitīvo dalītāju skaitu, ieskaitot 1 un k; piemēram, $d(10) = 4$.

Pierādīt, ka
$d(1)+d(2)+d(3)+\cdots d(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\cdots\left[\frac{n}{n}\right]$.

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

8. un 9. Klases

36.21. Taisnstūris sastāv no 19×86 rūtiņām. Divi spēlētāji pēc kārtas iekrāso vienu vai vairākas rūtiņas, kas kopā aizpilda kādu kvadrātu. Nevienu rūtiņu otrreiz krāsot nedrīkst. Tas, kas izdara pēdējo gājienu, uzvar. Kurš spēlētājs uzvar, pareizi spēlējot – tas, kas izdara pirmo, vai tas, kas izdara otro gājienu?

36.22. Riņķa līnijā ievilkts trijstūris *ABC* un tā iekšpusē ņemts punkts *S*. Stari *AS*, *BS* un *CS* krusto riņķa līniju punktos A_1, B_1, C_1; punkta *S* projekcijas uz *BC*, *AC* un *AB* ir A_2, B_2, C_2. Pierādīt, ka trijstūri $A_1B_1C_1$ un $A_2B_2C_2$ ir līdzīgi.

36.23. Kādiem pirmskaitļiem *p* skaitlis 2^p+p^2 arī ir pirmskaitlis?

36.24. Izliekta četrstūra *ABCD* laukums ir *L*. Tā iekšpusē atrodas punkts *O*. Dots, ka $2L=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$. Pierādīt, ka *ABCD* ir kvadrāts un *O* – tā centrs.

36.25. Galda tenisa turnīrā katrs dalībnieks spēlē ar katru citu tieši reizi. (Neizšķirtu nav.) Turnīra uzvarētājs (spēlētājs, kas uzvarēja vairāk spēlēs nekā jebkurš cits) uzvarēja vairāk par 68% un mazāk par 69% savu spēļu. Kāds mazākais dalībnieku skaits varēja būt turnīrā?

10. klase

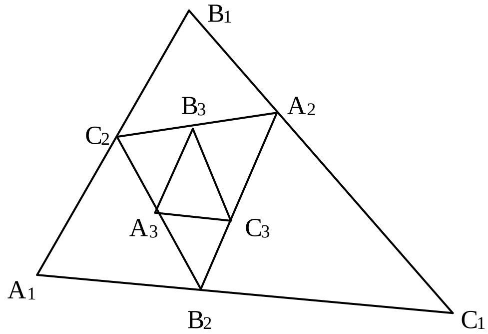
36.26. Naturālu skaitļu virkni $p_1, p_2, p_3, \ldots$ definē šādi: $p_1=2$; $p_2=3$; p_{n+1} ir lielākais pirmskaitlis, ar kuru dalās $p_1p_2p_3\cdots p_n+1$ $(n\geq 2)$.

Pierādīt, ka šajā virknē nav skaitļa 5.

36.27. Grupā mācās 27 studenti. Jānodibina vairākas komisijas tā, ka jebkuriem diviem studentiem var atrast tieši vienu (ne vairāk un ne mazāk) komisiju, kurā viņi abi piedalās. Vai to var izdarīt? Katrai komisijai jāsastāv no trim studentiem.

36.28. Skaitļu virkni $x_1, x_2, x_3, \ldots$ definē šādi $1 < x_1 < 2$; $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2}x_n^2$, ja $n \geq 1$. Pierādīt, ka indeksa vērtībām $k \geq 3$ ir spēkā nevienādība $\left|x_k - \sqrt{2}\right| < 2^{-k}$.

36.29. Trijstūru $A_1B_1C_1$ un $A_3B_3C_3$ malas ir attiecīgi paralēlas; apzīmēsim $A_1B_1C_1$ laukumu ar L_1, $A_2B_2C_2$ laukumu ar L_2, $A_3B_3C_3$ laukumu ar L_3. Pierādīt, ka $L_1 \cdot L_3 = L_2^2$ (36.2. zīm.).



36.2. zīm.

36.30. Rūtiņu lapā rūtiņas malas garums ir 1. Tajā uzzīmēts kvadrāts, kura malas garums ir *n*. Pierādīt, ka kvadrāta iekšpusē un uz tā kontūra kopā nav vairāk par $(n+1)^2$ punktiem, kas atrodas rūtiņu virsotnēs.

11. klase

36.31. Trijstūra piramīdas *ABCD* šķautņu *AB* un *CD* viduspunkti ir attiecīgi *M* un *N*. Pierādīt, ka katra plakne, kas iet caur *M* un *N*, dala piramīdas tilpumu uz pusēm.

36.32. Dots, ka *p* – pirmskaitlis. Pierādīt, ka $2^p + 3^p$ nav naturāla skaitļa pakāpe ar kāpinātāju, lielāku par 1.

36.33. Doti 7 nenegatīvi skaitļi $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$, turklāt $a_1 = a_7 = 0$. Pierādīt, ka eksistē tāds *i*, $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, ka $a_{i+1} + a_{i-1} \leq a_i\sqrt{3}$.
Vai šo nevienādību var pastiprināt, pamazinot konstanti $\sqrt{3}$?

36.34. Kvadrāts sadalīts $2n \times 2n$ rūtiņās. Tā iekšpusē novietotas $2n$ plāksnītes ar izmēriem $1 \times n$, kas savā starpā nepārklājas; to malas iet pa rūtiņu līnijām. Pierādīt, ka kvadrātā var ievietot vēl vienu tādu plāksnīti ar malām pa rūtiņu līnijām, kas nepārklājas ne ar vienu jau ievietoto. Vai apgalvojums ir spēkā arī tad, ja sākumā kvadrātā ievietotas $2n + 1$ plāksnītes?

36.35. Doti 19 veseli skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties tieši 10 skaitļus tā, ka visu izraudzīto skaitļu summa dalās ar 10.