Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 37. OLIMPIĀDE

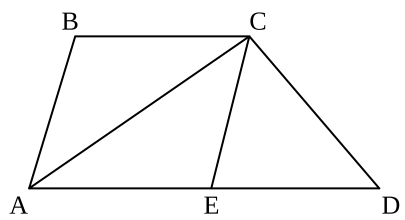
ATRISINĀJUMI

37.1. Pieņemsim pretējo. Tad visiem diskriminantiem jābūt negatīviem, t.i.,
$a^2 < b, \quad b^2 < a, \quad 1 < ab$.

No pirmajām divām nevienādībām seko, ka $a > 0$ un $b > 0$.

Sareizinot tās un saīsinot abas puses ar *ab*, iegūstam $ab < 1$, kas ir pretrunā ar trešo nevienādību.

37.1. Novelkam $CE \parallel AB$ (skat. 37.2. zīm.).

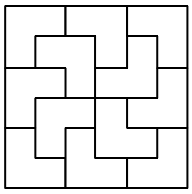


37.2. zīm.

Tad *ABCD* ir rombs. Tā kā $DE = DA - AE = DA - BC = CD$, tad *BDC* ir vienādsānu trijstūris. Apzīmējam $\angle CAE = \alpha$ un pakāpeniski iegūstam
$\angle BAC = \alpha, \quad \angle BCA = \alpha, \quad \angle ABC = 180° - 2\alpha, \quad \angle ACE = \alpha, \quad \angle AEC = 180° - 2\alpha,$
$\angle CED = 2\alpha, \quad \angle ECD = 2\alpha, \quad \angle EDC = 180° - 4\alpha.$

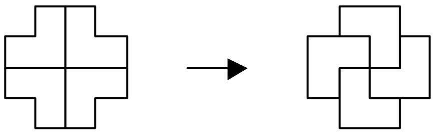
Tā kā *ACD* ir vienādsānu trijstūris, tad $\angle CDE = \angle CAD = \alpha$. Tātad $180° - 4\alpha = \alpha$ un $\alpha = 36°$. Tāpēc trapeces leņķi ir $72°, 108°, 144°, 36°$.

37.3. a) Skat. 37.3. zīmējumu.



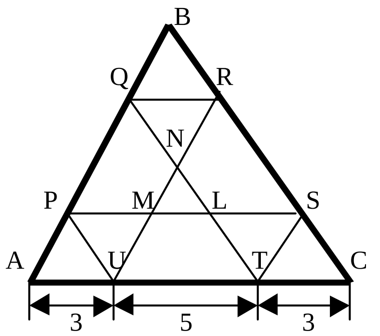
37.3. zīm.

c) Sadalām kvadrātu 24×24 16 kvadrātos ar izmēriem 6×6 un katru no tiem sagriežam "stūrīšos" kā iepriekšējā gadījumā. Pēc tam aplūkojam 9 punktus, kuros savienojas 4 kvadrāti 6×6. Katrā no tiem griezumus izmainām tā, kā parādīts 37.4 zīmējumā.



37.4. zīm.

37.4. Sadalām regulāro trijstūri ar malas garumu 11 vairākās daļās (skat. 37.5. zīm.).



37.5. zīm.

Ar trijstūri T_3 izmainām krāsu trijstūriem *APU*, *MPU*, *BQR*, *NQR*, *CST*, *LST*; ar trijstūri T_5 izmainām krāsu trijstūriem *PQL*, *RMS* un *UNT*. Rezultātā viss trijstūris *ABC* kļūs melns, jo visiem apgabaliem, izņemot *MNL*, krāsa mainīta vienu reizi, bet apgabalam *MNL* – trīs reizes.

Vēl, ja nepieciešams, jāpārkrāso atsevišķi nogriežņi un punkti.

37.5. Ja $n = 1$, tad 14 nav naturāla skaitļa kvadrāts.

Ja $n = 2$, tad $144 = 12^2$.

Ja $n = 3$, tad $1444 = 38^2$.

Ja $n > 3$, tad skaitļa pēdējie cipari ir 4444, un tas, dalot ar 16, dod atlikumā 12. Viegli pārbaudīt, ka naturāla skaitļa kvadrāts pēc moduļa 16 nedod atlikumu 12.

37.6. Pārveidojot, iegūstam

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{EE_1} =$$

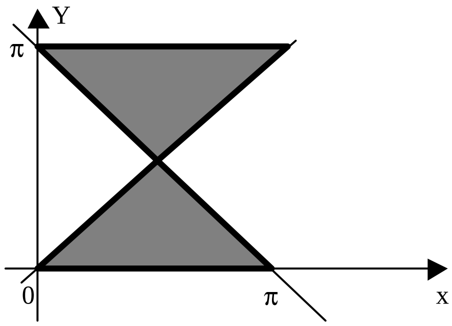
$$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\right) + \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}\right) +$$

$$\left(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) =$$

$$\frac{5}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}\right) = \vec{0}.$$

37.7. a) Pieņemsim, ka robeža $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ eksistē un ir vienāda ar a. Tad, pārejot uz robežu vienādībā $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_{n+1} - a_n) = 0$, iegūstam $2a - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$.

a) Prasītais apgabals attēlots 37.6. zīmējumā.

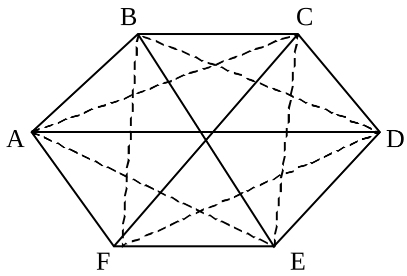


37.6. zīm.

37.8. Figūras laukumu apzīmēsim ar $[F]$. Tad (skat. 37.7. zīm.)

$$[ACE] = [ABCDEF] - [ABC] - [CDE] - [AFE],$$
$$[BDF] = [ABCDEF] - [BCD] - [DEF] - [FAB].$$

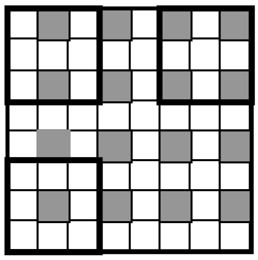
Trijstūru ABC un FAB laukumi ir vienādi, jo tiem ir kopīgs pamats AB un vienādi augstumi (Attālumi starp paralēlām taisnēm AB un FC). Līdzīgi pierāda, ka $[CDE] = [DEF]$ un $[AFE] = [FAB]$. No šejienes seko prasītā vienādība $[ACE] = [BDF]$.



37.7. zīm.

37.9. Identitāti pierāda, pakāpeniski konstruējot vienādības labajā un kreisajā pusē esošo funkciju grafikus. Atcerēsimies, $y = |f(x)|$ grafiku iegūst, atspoguļojot pret *Ox* asi simetriski to funkcijas $y = f(x)$ grafika daļu, kas atrodas zem *Ox* ass.

37.10. Iekrāsosim šaha dēlīti tā, kā parādīts 37.8. zīmējumā.



37.8. zīm.

Figūra var no baltā laucina pārvietoties tikai uz balto, un no melnā – tikai uz melno. Sākumā uz melnajiem lauciņiem atrodas tikai 1 figūra. Augšējā kreisajā stūrī ir 2 melni lauciņi, augšējā labajā – 4. Tas nozīmē, ka prasīto nevarēsim izpildīt ne vienā, ne otrā gadījumā.

36.11. Pārveidojot, iegūstam

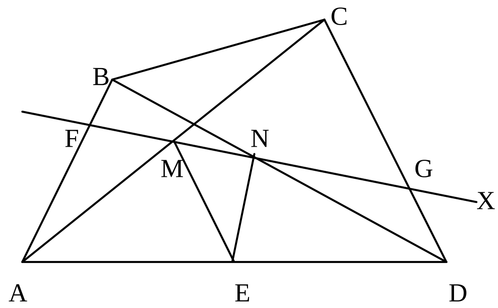
$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x =$$
$$(\sin x + \sin 7x) + (\sin 3x + \sin 5x) =$$
$$2\sin 4x \cos 3x + 2\sin 4x \cos x =$$
$$2\sin x\,(\cos 3x + \cos x) =$$
$$4\cos x \cos 2x \sin 4x.$$

36.12. Izdarām 2 svēršanas:

1) 2 un 3 kapeiku monētas salīdzinām ar 5 kapeiku monētu,
2) 1 un 2 kapeiku monētas salīdzinām ar 3 kapeiku monētu.

Ja kādā no svēršanām svari atrodas līdzsvarā, tad viltota ir attiecīgi nesvērtā monēta. Pārbaudām, ka arī visos pārējos 4 gadījumos var viennozīmīgi noteikt viltoto monētu.

36.13. Apzīmēsim *AD* viduspunktu ar *E* (skat. 37.9. zīm.).



37.9. zīm.

ME ir trijstūra *ACD* viduslīnija, tāpēc $ME = \frac{1}{2}CD$.

Līdzīgi $EN = \frac{1}{2}AB$. Tā kā $AB = CD$, tad $ME = EN$, un *MEN* ir vienādsānu trijstūris. Tātad $\angle NME = \angle MNE$. Tā kā $ME \parallel CD$, tad $\angle NME = \angle XGD$. $\angle DGX = \angle NGC$ kā krustleņķi. Tāpēc $\angle NME = \angle NGC$.

Līdzīgā veidā iegūstam, ka $\angle MNE = \angle BFM$. Tāpēc
$\angle BFM = \angle MNE = \angle NME = \angle NGC$, kas arī bija jāpierāda.

37.14. Doto polinomu pārveidosim formā

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^2(x-1) + (a+b)x(x-1) + (a+b+c)(x-1) + (a+b+c+d).$$

Ja *x* vietā ievietojam skaitli, kas pārsniedz 1, tad visi saskaitāmie ir nenegatīvi, bet pirmais – pozitīvs. Pozitīva ir arī to summa. Tātad dotajam vienādojumam nav sakņu, kas lielākas par 1.

37.15. Ar Z_1 apzīmēsim zēnu, kas dejojis ar visvairāk meitenēm. Ar M_2 apzīmēsim jebkuru meiteni, kas nav dejojusi ar Z_1. Meitene M_2 noteikti ir dejojusi ar kādu citu zēnu Z_2.

Meiteņu skaits, ar kurām ir dejojis Z_1, ir ne mazāks par meiteņu skaitu, ar kurām dejojis Z_2. Tā kā Z_2 ir dejojis ar M_2, bet Z_1 nē, tad eksistē meitene M_1, ar kuru Z_1 ir dejojis, bet Z_2 nav. Šie četri skolēni atbilst uzdevuma nosacījumiem.

37.16. Ar ekvivalentiem pārveidojumiem pārveidojam doto nevienādību

$$1+\cos(\alpha-\beta)\geq\cos\alpha+\cos\beta\Leftrightarrow$$
$$1+\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta\geq\cos\alpha+\cos\beta\Leftrightarrow$$
$$(1-\cos\alpha)\cdot(1-\cos\beta)+\sin\alpha\cdot\sin\beta\geq 0\,.$$

Šī nevienādība izpildās, jo α un β ir šauri leņķi.

37.17. Pieņemsim pretējo, ka riņķa līnija nepieskaras nevienai 1987-stūra malai. Tad daudzstūra virsotne A_1 atrodas ārpus riņķa līnijas. Tā kā riņķa līnija krusto malu A_1A_2, tad virsotne A_2 atrodas riņķa līnijas iekšpusē. Līdzīgi -- A_3 atrodas ārpus riņķa līnijas, bet A_4 atrodas riņķa līnijas iekšpusē. Šādi turpinot, iegūstam, ka A_{1987} atrodas ārpus riņķa līnijas, bet A_1 atrodas riņķa līnijas iekšpusē. Iegūta pretruna, kas pierāda, ka uzdevuma apgalvojums ir pareizs.

37.18. a) Ar katru gājienu nenosvītroto skaitļu skaits samazinās par vienu. Tātad ir izdarīti 1986 gājieni. Pie dotajiem 1987 vieniniekiem tātad pierakstīti vēl 1986 skaitļi. Kopa uzrakstīti $1987+1986=3973$ skaitļi.

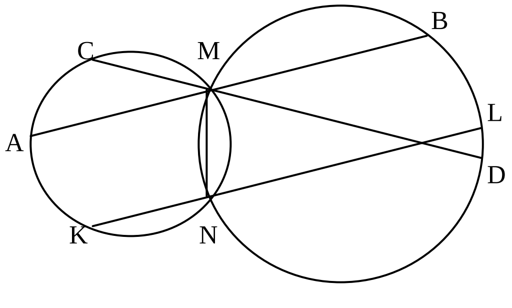
b) Nenosvītroto skaitļu summa visu laiku paliek nemainīga. Tātad pēdējais skaitlis ir 1987.

b) Visu uzrakstīto skaitļu summa ir 23783.

37.19. Prasīto daudzskaldni iegūst no regulāra oktaedra, mazliet nobīdot tā virsotnes, lai plakne varētu šķelt visas tā skaldnes. Tādā gadījumā šķēlums būs astoņstūris.

37.20. Sadalām skolniekus "ciklos" $A_1\to A_2\to\cdots A_n\to A_1$. Bultiņa $A\to B$ nozīmē, ka B uzvilcis A cepuri. Atliek pierādīt, ka katram šādam ciklam divās dienās iespējams atgriezt cepures saviem īpašniekiem.

37.21. Novelkam $NL\parallel AB$ (skat. 37.10. zīm.).



37.10. zīm.

No simetrijas pret nogriežņa MN vidusperpendikulu seko, ka $CD = KL$. Ja mēs pierādīsim, ka $ABLK$ ir paralelograms, prasītais būs pierādīts.

Tā kā $KN \parallel AM$, tad $AKNM$ ir riņķī ievilkta trapece; tāpēc tā ir vienādsānu un $\angle MAK = \angle AMN$. Līdzīgi pierāda, ka $\angle MNL = \angle BLN$. Tā kā $\angle AMN = \angle MNL$, tad $\angle MAK = \angle BLN$. Ņemot vērā šo vienādību un to, ka četrstūra $ABLK$ malas AB un LK ir paralēlas, secinām, ka $ABLK$ ir paralelograms. Prasītais pierādīts.

37.22. Apzīmēsim

$S_i = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \cdots + (x_i - y_i)$. Tad

$$-\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) + \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \cdots + \frac{1}{y_n}\right) =$$

$$\left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{x_1}\right) + \left(\frac{1}{y_2} - \frac{1}{x_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{y_n} - \frac{1}{x_n}\right) =$$

$$\frac{x_1 - y_1}{x_1 y_1} + \frac{x_2 - y_2}{x_2 y_2} + \cdots + \frac{x_n - y_n}{x_n y_n} =$$

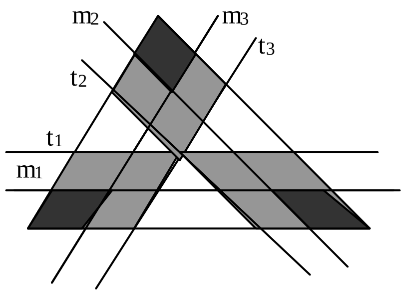
$$\frac{S_1}{x_1 y_1} + \frac{S_2 - S_1}{x_2 y_2} + \cdots + \frac{S_n - S_{n-1}}{x_n y_n} =$$

$$S_1\left(\frac{1}{x_1 y_1} - \frac{1}{x_2 y_2}\right) + S_2\left(\frac{1}{x_2 y_2} - \frac{1}{x_3 y_3}\right) + \cdots + S_n \frac{1}{x_n y_n} \geq 0,$$

ko arī vajadzēja pierādīt.

37.23. Izvēlamies patvaļīgu rūtiņu *A* un apskatām tās 15 rūtiņas, kas atrodas vienā rindiņā vai vienā kolonnā ar *A*. Izpildām 15 atļautās maiņas ar "centriem" šajās 15 rūtiņās. Viegli pārbaudīt, ka rezultātā krāsu mainīs tikai rūtiņa *A*. Tā kā var mainīt patvaļīgas rūtiņas krāsu, tad var iegūt arī patvaļīgu krāsojumu.

37.24. Trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir $\frac{100}{50} = 2$ cm. Novelkam caur tās centru taisnes t_1, t_2, t_3 paralēli trijstūra malām (skat 37.11. zīm.). Skaidrs, ka iesvītroto paralelogramu laukumu summa mazāka par trijstūra laukumu, t.i., par 100 cm^2. Uzdevuma nosacījumos minētās taisnes m_1, m_2, m_3 atšķeļ melnos paralelogramus, kas ir ceturtdaļa no atbilstošajiem iesvītrotajiem paralelogramiem.; tātad to laukumu summa ir mazāka par 25 cm^2.



37.11. zīm.

37.25. Pirmais spēlētājs var uzvarēt, izvēloties šādu stratēģiju. Ievērojot, ka sākotnējais akmeņu skaits nedalās ar 6, katrā gājienā viņš atņem 1, 2, 3, 4 vai 5 akmeņus tā lai atlikušais akmeņu skaits dalītos ar 6. Pēc otrā spēlētāja kārtējā gājiena atlikušo akmeņu skaits atkal nedalīsies ar 6, jo viņš nevar atņemt 6*k* akmeņus (6*k* nav pirmskaitļa pakāpe, jo 6*k* dalās ar 2 un 3). Rezultāta pēdējo akmeni paņems pirmais spēlētājs.

37.26. Ja *a* un *b* divi nogriežņi, kuru garumi nepārsniedz 1, tad aplūkosim tādu nogriežņu viduspunktu kopu *c*, kuriem viens galapunkts pieder *a*, bet otrs galapunkts pieder *b*. Arī *c* ir nogrieznis, kura garums ir $\frac{a+b}{2}$ un, tātad, nepārsniedz 1. Tātad M_1 var pārklāt ar 5 sākotnējiem nogriežņiem un 10 nogriežņiem, kas atbilst šo piecu nogriežņu pāriem (to savstarpējo viduspunktu kopām).

37.27. Vispirms pierāda, ka trijstūri, kas atrodas pie piecstūra malām ir līdzīgi, un pēc tam, ka tie ir vienādi.

37.28. Aplūkosim divus gadījumus.

1) *A* nav naturāla skaitļa kvadrāts. Tad *A* satur kādu pirmskaitli *p* nepāra pakāpē $2k+1$. Pietiekami lieliem *x* skaitlis *x*! dalās ar p^{2k+2}. Tas nozīmē, ka $x!-A$ dalās ar p^{2k+1}, bet nedalās ar p^{2k+2}, un nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.
2) *A* ir naturāla skaitļa kvadrāts $3^{2k}m^2$, kur *m* nedalās ar 3. Pietiekami lieliem *x* skaitlis *x*! dalās ar 3^{2k+1}. Ja izpildītos vienādība $x!-A=y^2$, tad izdalot šo vienādību ar 3^{2k}, iegūstam $3l=\frac{x!}{3^{2k}}=n^2+m^2$, kur *n* un *m* nedalās ar 3 ($n^2=\frac{y^2}{3^{2k}}$). Bet $n^2+m^2\equiv 1+1 \pmod 3$ nedalās ar 3.

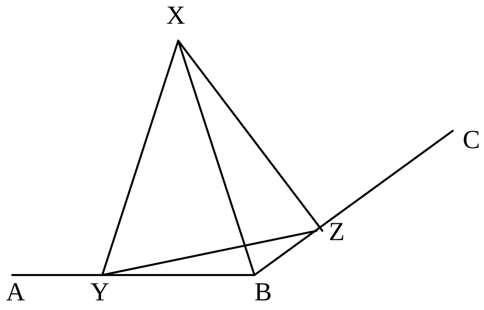
37.29. Pakāpeniski pierāda šādus apgalvojumus

1) Sākot no $n=2$ virkne nx_n ir nedilstoša.

2) Tā ir ierobežota no augšas ar skaitli 1.

3) Tās robeža ir 1.

37.30. Aplūkojam patvaļīgu trijstūra *XYZ* stāvokli (37.12. zīm.).



37.12. zīm.

Ievērosim, ka $\angle ABC = \dfrac{180°(n-2)}{n}$, bet $\angle YXZ = \dfrac{360°}{n}$. Tāpēc $\angle ABC + \angle YXZ = 180°$. Tātad ap četrstūri *YXZB* var apvilkt riņķa līniju. Tā kā hordas *XY* un *XZ* ir vienādas, tad leņķi $\angle XBY$ un $\angle XBZ$ ir vienādi. Tātad punkts *X* atrodas uz leņķa *ABC* bisektrises.

Tātad *X* apraksta figūru, kas sastāv no *n* vienādiem nogriežņiem ar kopīgu galapunktu *O*. Nogriežņi atrodas uz taisnēm, kas savieno *O* ar *n*-stūra virsotnēm.

37.31. Vispirms pierāda, ka stars atspoguļojoties no trijstūra malām var iet tikai 6 virzienos $\alpha, -\alpha, \alpha-120°, 120°-\alpha, \alpha-240°, 240°-\alpha$. Tātad no minētajām 7 reizēm stars vismaz divas reizes caur punktu *O* gāja vienā un tajā pašā virzienā. Tātad kustība ir periodiska, un stars caur punktu *O* ies vēl bezgalīgi daudzas reizes.

37.32. Apzīmēsim *i*-tā posma projekciju garumus uz koordinātu asīm ar x_i, y_i, z_i, bet projekciju garumus koordinātu plaknēs ar a_i, b_i, c_i; paša posma garums ir l_i. Tad

$$a_i^2 = y_i^2 + z_i^2, \quad b_i^2 = x_i^2 + z_i^2, \quad c_i^2 = x_i^2 + x_i^2;$$

$$l_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = \frac{1}{2}\left(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2\right).$$

Tāpēc

$$\left(a_i + b_i + c_i\right)^2 = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + 2a_1b_1 + 2a_1c_1 + b_1c_1 \le$$
$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + \left(a_i^2 + b_i^2\right) + \left(a_i^2 + c_i^2\right) + \left(b_i^2 + c_i^2\right) =$$
$$3\left(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2\right) = 6l_1^2 \quad \Rightarrow \quad a_i + b_i + c_i \le \sqrt{6}l_i.$$

Summējot šīs nevienādības visiem *i*, iegūstam $\dfrac{a+b+c}{l} \le \sqrt{6}$.

Šādu attiecību var iegūt, piemēram, slēgtai lauztai līnijai, kas savieno punktus
(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 0), (3, 1, -1), (2, 0, -2), (1, -1, -1).

37.33. Apzīmēsim 1987 ar p (p ir pirmskaitlis). Aplūkosim dotajā summā locekļus, kas atrodas vienādā attālumā no summas galiem.

$$\frac{1}{(n-2)(n-1)n}+\frac{1}{(p-n)(p-n+1)(p-n+2)}=$$
$$\frac{(p-n)(p-(n-1))(p-(n-2))+n(n-1)(n-2)}{n(n-1)(n-2)(p-n)(p-n+1)(p-n+2)}.$$

Skaitītāja atverot iekavas, $n(n-1)(n-2)$ saīsinās; tātad skaitītājs dalās p. Šis p nesaīsinās ar saucēju, jo p ir pirmskaitlis, bet saucējā visi reizinātāji ir mazāki par p. Saskaitot k šādas daļas, arī rezultātā skaitītājs dalās ar p, un reizinātājs p nesaīsinās (jo kopsaucējā visi reizinātāji mazāki par p).

37.34. Punktus tā var izkrāsot. Apgalvojumu pierāda ar matemātisko indukciju pēc punktu skaita n.

37.35. Apzīmēsim virsotnēs ierakstītos skaitļus ar A, B, C, D, E. Aplūkosim lielumu $S=(A-C)^2+(B-D)^2+(C-E)^2+(D-A)^2+(E-B)^2$.

Pārbaudām, ka operācijas rezultātā šis lielums samazinās. Tā kā S ir vesels nenegatīvs skaitlis, tad tas nevar pamazināties bezgalīgi ilgi. Tātad apskatāmais process nevar turpināties bezgalīgi.