Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 38. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

38.1. Nē, neeksistē. Ja tāda funkcija eksistētu, tad

$$\begin{cases} a+b+c=7 \\ 25a+5b+c=8 \\ 81a+9b+c=9\,. \end{cases}$$

Atņemot no 2. un 3. Vienādojuma pirmo, iegūstam

$$\begin{cases} 24a+4b=1 \\ 80a+8b=2\,. \end{cases}$$

Pareizinot šīs sistēmas 1. Vienādojumu ar 2 un atņemot no otrā, iegūstam $32a=0$, tātad $a=0$. Bet, ja $a=0$, tad apskatāmā funkcija nav kvadrātfunkcija.

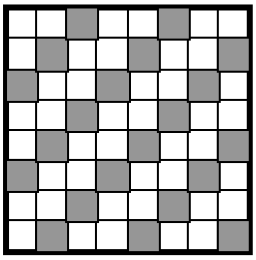
38.2. Apskatīsim visus naturālos skaitļus no 1 līdz 60. Pirmā progresija šajā intervālā satur ne vairāk kā 60 : 3 = 20 skaitļus, otrā – ne vairāk kā 60 : 4 = 15 skaitļus, trešā – ne vairāk kā 60 : 5 = 12 skaitļus, ceturtā ne vairāk kā 60 : 6 = 10 skaitļus.
Tātad visas kopā tās šajā intervālā satur ne vairāk kā $20+15+12+10=57$ skaitļus. Tāpēc starp pirmajiem 60 naturālajiem skaitļiem vismaz 3 skaitļi nepieder nevienai no dotajām progresijām.

38.3. a) Jā, der, piemēram, skaitlis 48, jo $48=24+12+6+3+2+1$.

b) Jā, der, piemēram, skaitlis $3\cdot 2^{1986}$, jo
$1+2+3\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+3\cdot 2^{1985}=3\left(1+\left(1+2+2^2+\cdots 2^{1985}\right)\right)=3\cdot 2^{1986}$

38.4. Pieņemsim, ka divi trijstūri $A_1B_1C_1$ un $A_2B_2C_2$ ir gandrīz vienādi. Tad leņķi $\angle A_1$ un $\angle A_2$ ir vienādi; kā arī vienādas ir šo leņķu pretmalas. No sinusu teorēmas seko, ka vienādi ir ap šīm riņķa līnijām apvilkto riņķa līniju rādiusi. Tātad arī pirmajam un *n*-tajam trijstūrim ir vienādi apvilktās riņķa līnijas rādiusi. Bet, ja diviem līdzīgiem trijstūriem ir vienādi kaut kādi lineārie izmēri (šajā gadījumā apvilkto riņķa līniju rādiusi), tad tie ir vienādi. Tātad pirmais trijstūris ir vienāds ar *n*-to.

38.5. Apskatīsim 38.1. zīmējumā iekrāsotās rūtiņas.

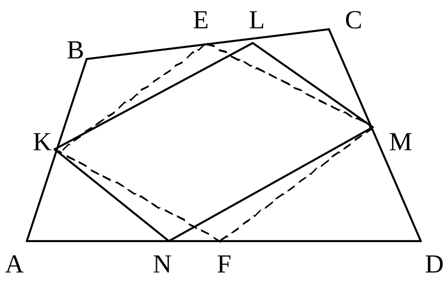


38.1. zīm.

Katram kvadrātam ar izmēriem 5×5 rūtiņas vismaz viena virsotne ir atzīmēta. Pirmais spēlētājs ar vienu gājienu var nokrāsot melnu augstākais vienu atzīmēto virsotni. Gadījumā, ja pirmais spēlētājs to dara, otrais spēlētājs ar savu nākošo gājienu pārkrāso to atpakaļ par baltu. Tātad pēc otrā spēlētāja gājiena vienmēr visas atzīmētās rūtiņas būs baltas un katram kvadrātam 5×5 vismaz viena rūtiņa būs balta.

38.6. Var būt, ka $m=5$. Piemēram, virkne var sākties šādi: 1, 2, 3, 1, 1.
Pierādīsim, ka vienmēr $m\le5$. Tiešām, apskatīsim patvaļīgas šādas virknes sākuma fragmentu:
$a_1, a_2, a_3, a_4=a_2-a_1, a_5=a_3-a_2, a_6=a_2-a_1-a_3$.
Redzam, ka $a_1+a_5+a_6=0$. Bet tas nozīmē, ka visi skaitļi a_1, a_5 un a_6 nevar būt pozitīvi.

38.7. Aplūkosim doto zīmējumu. Dotā paralelograma virsotnes apzīmēsim ar *KLMN*, bet malu *BC* un *AD* viduspunktus *E* un *F*.



38.2. zīm.

No trijstūra viduslīniju īpašībām seko, ka *KEMF* ir paralelograms. Viegli pierādīt, ka paralelograma *KEMF* laukums ir puse no dotā četrstūra laukuma. Tā kā *KLMN* ir paralelograms, tad *KM* un *LN* viduspunkti sakrīt. Tā kā *KEMF* ir paralelograms, tad *KM* un *EF* viduspunkti sakrīt. Tātad sakrīt arī *LN* un *EF* viduspunkti. Tas iespējams divos gadījumos.

1) *E* sakrīt ar *L* un *N* sakrīt ar F. Šajā gadījumā prasītais jau pierādīts.

2) *ELFN* ir paralelograms. Tad $BC \parallel AD$. Šajā gadījumā $S_{ABCD} = KM \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{2} h \cdot KM = 2 \cdot S_{KLMN}$, kur *h* ir attālums starp taisnēm *BC* un *AD.*

38.8. Eksistē tāds leņķis φ, ka $\sin\varphi = \frac{3}{5}$ un $\cos\varphi = \frac{4}{5}$. No dotajām sakarībām seko

$$x_2 = \sin 2\varphi, \quad y_2 = \cos 2\varphi,$$
$$x_3 = \sin 4\varphi, \quad y_3 = \cos 4\varphi,$$
$$\dots$$
$$x_n = \sin 2^{n-1}\varphi, \quad y_n = \cos 2^{n-1}\varphi.$$

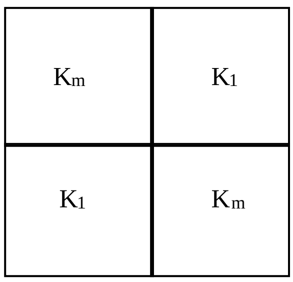
No šejienes seko uzdevuma apgalvojums.

38.9. Veiksim induktīvu konstrukciju.

Ja $n=1$, tad ir tikai 1 kvadrāts; skaidrs, ka katra taisne krusto ne vairāk kā vienu kvadrātu.

Ja $n=2$, ir 4 kvadrāti; skaidrs, ka katra taisne krusto ne vairāk kā 2 kvadrātus.

Pieņemsim, ka konfigurācija K_m sastāv no $3 \cdot 2^{m-1} - 2$ kvadrātiem, un katra taisne, kas paralēla to malām, krusto ne vairāk kā *m* kvadrātus. Aplūkosim konfigurāciju, kas parādīta 38.3. zīmējumā.



38.3. zīm.

Uzzīmētā konfigurācija satur $2\cdot\left(3\cdot 2^{m-1}-2\right)+2=3\cdot 2^{(m+1)-1}-2$ kvadrātus, un katra apskatāmā taisne krusto ne vairāk kā $m+1$ no tiem (vienu lielo kvadrātu un ne vairāk kā *m* no konfigurācijas K_m).

38.10. Tā kā nuļļu un vieninieku virkņu ar garumu *k* skaits ir 2^k , tad katrā universālā virknē jābūt vismaz 2^k vietām, no kurām šie 2^k fragmenti var sākties. Tā kā pēdējam fragmentam jāturpinās vēl $k-1$ ciparus pēc sava sākuma, tad *k*-universālai virknei jāsatur vismaz 2^k+k-1 locekļus.

Šādas virknes eksistenci pierāda ar matemātisko indukciju.

38.11. a) Nē; jo $|\sin x|^2+|\cos x|^2=|\sin y|^2+|\cos y|^2=1$.

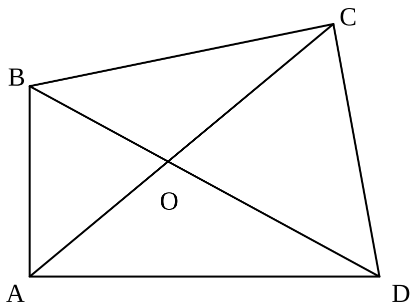
a) Jā; piemēram, ja *x* – pirmā, bet *y* – trešā kvadranta leņķis.

38.12. Pietiek pierādīt, ka $19\,|\,20^{15}-1$ un $31\,|\,20^{15}-1$. Dotās dalāmības seko no kongruencēm

$20^{15}-1\equiv 1^{15}-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}19)$,

$20^{15}-1\equiv\left(20^3\right)^5-1\equiv 8000^5-1\equiv 2^5-1\equiv 32-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 31)$.

38.13. Aplūkosim četrstūri *ABCD* (skat. 38. 4. zīm.).



38.4. zīm.

Apzīmēsim leņķi $\angle AOB$ ar φ. Tad no kosinusu teorēmas iegūstam

$$AO^2+BO^2-2AO\cdot BO\cdot\cos\varphi=AB^2,$$
$$BO^2+CO^2-2BO\cdot CO\cdot\cos\varphi=BC^2,$$
$$CO^2+DO^2-2CO\cdot DO\cdot\cos\varphi=CD^2,$$
$$DO^2+AO^2-2DO\cdot AO\cdot\cos\varphi=AD^2.$$

Saskaitot šīs vienādības un ievērojot doto, iegūstam

$\cos\varphi \cdot (AO - CO) \cdot (DO - BO) = 0$.

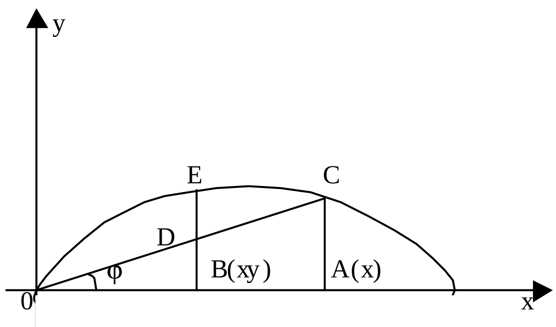
No šejienes seko prasītie apgalvojumi.

38.14. Apzīmēsim visu skaitļu summu ar *S*. Pieņemsim, ka $S > 0$. Tad starp 10 skaitļiem nav nulles, un starp tiem ir gan pozitīvi skaitļi (jo $S > 0$), gan negatīvi (ja visi skaitļi būtu pozitīvi, tad mazākais no tiem nepārsniegtu $\frac{S}{10}$ un tātad pēc moduļa būtu mazāka par 9 pārējo summu).

Apskatīsim pašu mazāko (negatīvu) no dotajiem 10 skaitļiem; apzīmēsim to ar *a*. Tad pārējo 9 skaitļu summa ir $S - a = S + |a| > |a|$; iegūta pretruna.

Līdzīgi iegūstam pretrunu, ja $S < 0$.

38.15. Apskatām funkcijas $f(x) = \sin x$ grafiku intervālā $[0, \pi]$. (Skat. 38.5. zīm.).



38.5. zīm.

Apskatām punktu *A* ar koordinātu *x* un *B* ar koordinātu *xy* uz abscisu ass. Tad $BE = \sin(xy)$, $BD = OB \cdot \mathrm{tg}\varphi = \mathrm{xy}\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{OA}} = xy\frac{\sin x}{x}$. Tā kā $\sin x$ ir izliekta funkcija intervālā $[0, \pi]$, tad $BE > BD$. Tātad $\sin(xy) > xy\frac{\sin x}{x} \Rightarrow \sin(xy) > y\sin x$, kas arī bija jāpierāda.

38.16. Nē, nav taisnība. Apskatīsim platleņķa trijstūri *ABC* ($\angle ABC > 90°$), kuram $AC = 2$, bet *B* tiek izvēlēts "ļoti tuvu" punktam *C*.

Tad pie $B \to C$ izpildās $p \to 2$ un $m_1 + m_2 + m_3 \to 4$. Skaidrs, ka $4 > 2\sqrt{3}$. Tā kā visi apskatāmie lielumi mainās nepārtraukti, tad nevienādība $m_1 + m_2 + m_3 > p\sqrt{3}$ izpildās, ja punkts *B* ir pietiekami tuvu punktam *C*.

38.17. Ievērosim, ka

$$\cos(x+y)+2\cos x+2\cos y+3=$$
$$2\cos^2\frac{x+y}{2}-1+4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+3=$$
$$2t^2+4\cos\frac{x-y}{2}\cdot t+2,\quad \text{kur}\quad t=\cos\frac{x+y}{2}.$$

Tā kā kvadrāttrinoma diskriminants $\left(4\cos\frac{x-y}{2}\right)^2-4\cdot 2\cdot 2=-16\sin^2\frac{x-y}{2}$ ir nenegatīvs, tad kvadrāttrinoma vērtības nevar būt negatīvas.

38.18. Tas var būt cipars 3. Tiešām, $2^5=32$ un $5^5=3125$.

Pierādīsim, ka pirmais cipars *a* var būt tikai 3. Tiešām, ja gan 2^n, gan 5^n sākas ar ciparu *a*, tad

$$a\cdot 10^t<2^n<(a+1)\cdot 10^t$$
$$a\cdot 10^s<5^n<(a+1)\cdot 10^s\ ,$$

kur *s* un *t* – kaut kādi naturāli skaitļi. Sareizinot šīs nevienādības, iegūstam
$a^2\cdot 10^{t+s}<10^n<(a+1)^2\cdot 10^{t+s}$ jeb $a^2<10^{n-t-s}<(a+1)^2$.

Tā kā $a+1\le 10$, tad $a^2<10<(a+1)^2$. No šīm nevienādībām seko, ka cipars *a* ir vienāds ar 3.

38.19. Iedomāsimies, ka konstruēts zemintegrāļa funkcijas $f(x)$ grafiks pie $x>0$. Mums jāatrod laukums starp *Ox* asi un šo grafiku.

Ja $x>1$, tad $1\le\frac{\lceil x\rceil}{x}\le\frac{x+1}{x}<2$; tāpēc $\left\lfloor\frac{\lceil x\rceil}{x}\right\rfloor=1$ un zemintegrāļa funkcija ir 0.

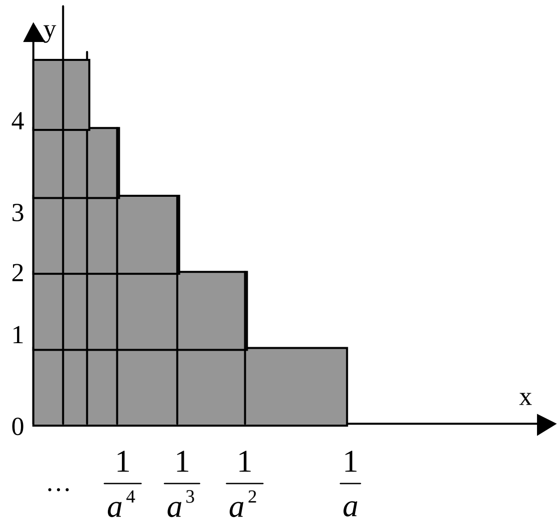
Tāpēc mums jāapskata tikai intervāls $[0,1]$.

Pieņemsim, ka $k\ge 1$ -- naturāls skaitlis.

Ja $\frac{1}{k+1}<x<\frac{1}{k}$, tad $\lceil x\rceil=1$, tātad $\frac{\lceil x\rceil}{x}=\frac{1}{x}$ un $\left\lfloor\frac{\lceil x\rceil}{x}\right\rfloor=k$. No šejienes seko:

ja $\frac{1}{a^{m+1}}<x<\frac{1}{a^m}$, tad $\left\lfloor\log_a\left\lfloor\frac{\lceil x\rceil}{x}\right\rfloor\right\rfloor=m$.

Tagad varam uzzīmēt zemintegrāļa funkcijas grafiku (skat. 38.6. zīm.).



38.6. zīm.

Aprēķināmā integrāļa laukums ir iezīmētās figūras laukums. Tas ir vienāds ar
$\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\cdots=\frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}=\frac{1}{a-1}$.

38.20. *Lemma.* Dots, ka $m+n+k=h, \quad m\ge 0, n\ge 0, k\ge 0$. Ja regulāra trijstūra augstums ir *h*, tad tā iekšpusē var atrast tādu punktu, kura attālumi līdz trijstūra malām ir *m*, *n* un *k*.

Pierādījums. Novelkam divas taisnes; pirmo paralēli *AC* attālumā *m* no taisnes *AC*, otro paralēli *AB* attālumā *n* no *AB*. To krustpunkts *O* atrodas attālumā *k* no malas *BC*. Tiešām, apzīmējot šo attālumu ar *x*, iegūstam
$$\frac{1}{2}ah=S_{ABC}=S_{ABO}+S_{ACO}+S_{BCO}=\frac{1}{2}an+\frac{1}{2}am+\frac{1}{2}ax.$$
Tātad $h=n+m+x$; tas nozīmē, ka $x=k$.

Apskatām regulāru trijstūri ar malas garumu 1 (tā augstums ir $\frac{\sqrt{3}}{2}$) un atrodam tā iekšpusē punktu *O*, kura attālumi līdz trijstūra malām ir $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$. Izmantojot Pitagora teorēmu, viegli pārbaudīt, ka punkta *O* attālumi līdz trijstūra virsotnēm ir *x*, *y* un *z* vērtības, kas apmierina uzdevumā minēto vienādojumu sistēmu.

38.21. Pieņemsim, ka izpildās vienādība $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=y^2$. Tā kā reizinātājiem $x, x+1, x+2, x+3, x+4$ nav kopīgu pirmreizinātāju, kas lielāki par 3, tad visi pirmskaitļi, izņemot 2 un 3, ieiet šo skaitļu kanoniskajā sadalījumā pirmreizinātājos pāra pakāpēs. Tāpēc katrs no šiem 5 skaitļiem var būt izteikts vienā no 4 veidiem: $n^2, 2n^2, 3n^2, 6n^2$. Tātad divi no tiem ir viena veida skaitļi:

$a = sk^2$, $b = sm^2$, $s \in \{1, 2, 3, 6\}$. Tas nozīmē, ka $s(m^2 - k^2) = b - a \le 4$.

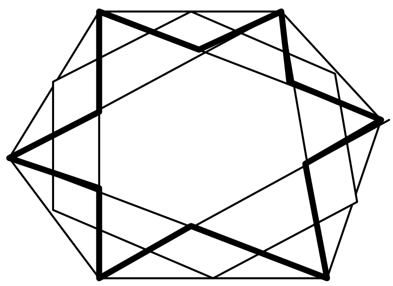
Tātad $k = 1$ un $s = 1$. Tas nozīmē, ka viens no reizinātājiem (tas var būt tikai x) ir vienāds ar 1.

Bet $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ nav naturāla skaitļa kvadrāts.

38.22. Ja $n = 3$, tad no trijstūru viduslīniju īpašībām seko, ka $\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{2}$. Pierādīsim, ka pie $n \ge 4$ attiecība $\frac{P_2}{P_1}$ var pieņemt visas vērtības no intervāla $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ un nekādas citas.

Tā kā D_2 ir izliekts daudzstūris, kas atrodas daudzstūra D_1 iekšpusē, tad $\frac{P_2}{P_1} < 1$.

Aplūkosim patvaļīgu *n*-stūri (skat. 38.7. zīm.).



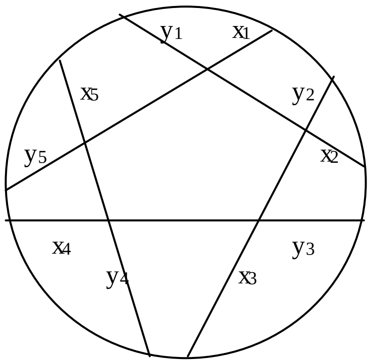
38.7. zīm.

No trijstūra viduslīniju īpašības seko, ka daudzstūra D_2 perimetrs ir $\frac{1}{2}$ no uzzīmēto diagonāļu summas. Bet, kā seko no trijstūru nevienādības, pat iezīmēto nogriežņu summa ir lielāka par daudzstūra D_1 perimetru. No šejienes seko nevienādība $\frac{P_2}{P_1} > \frac{1}{2}$.

38.23. Ja pirmajā gājienā izvēlamies skaitli $\alpha = \frac{a_1 + a_2}{2}$, tad pēc pirmā gājiena pirmie divi skaitļi kļūs vienādi. Ar otro gājienu varam panākt, ka pirmie trīs skaitļi kļūs vienādi. Turpinot šādus gājienus, panākam, ka pēc $n - 1$ gājiena visi skaitļi kļūs vienādi ar *a*. Izvēloties *n*-tajā gājienā $\alpha = a$, iegūstam komplektu no *n* nullēm.

Ar matemātisko indukciju var pierādīt, ka, piemēram, skaitļu komplektu $\langle 1!, 2!, \ldots, n! \rangle$ nevar pārveidot par nuļļu komplektu ar mazāk par *n* gājieniem.

38.24. Apzīmēsim piecstūra malas garumu ar *a*, bet malu pagarinājumus, kā parādīts 38.8. zīmējumā.



38.8. zīm.

No teorēmas par hordu nogriežņu reizinājumiem, pielietojot to piecstūra virsotnēm, iegūstam

$$x_1(a+y_5)=y_1(a+x_2),$$
$$x_2(a+y_1)=y_2(a+x_3),$$
$$x_3(a+y_2)=y_3(a+x_4),$$
$$x_4(a+y_3)=y_4(a+x_5),$$
$$x_5(a+y_4)=y_5(a+x_1).$$

Saskaitot vienādības, saīsinot līdzīgos locekļus un iegūto vienādību izdalot ar *a*, iegūstam

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=y_1+y_2+y_3+y_4+y_5\,.$$

38.25. Ja $a<b$ un $c<d$, tad no nevienādības $(a-b)(c-d)>0$ seko, ka $ac+bd>ad+bc$.

Tāpēc $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{50}b_{50}$ lielākā iespējamā vērtība S_1 tiks iegūta, ja abas virknes $a_1,a_2,\ldots,a_n$ un $b_1,b_2,\ldots,b_n$ ir augošas, bet $c_1d_1+c_2d_2+\cdots+c_nd_n$ mazākā iespējamā vērtība S_2 tiks iegūta, ja virkne $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ir augoša, bet virkne $b_1,b_2,\ldots,b_n$ ir dilstoša.

(Pierādījumā jāizmanto optimizācijas metode)

Tātad

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{50}b_{50}\le$$

$1^2 + 2^2 + \cdots 50^2 < 2(1 \cdot 50 + 2 \cdot 49 + \cdots 50 \cdot 1) \leq$

$2(c_1 d_1 + c_2 d_2 + \cdots + c_n d_n)$.

Skaitlisko nevienādību pierāda, izmantojot naturālo skaitļu kvadrātu summas formulu $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

38.26. Skaitlis no 1 līdz 1988 nevar saturēt vairāk nekā 4 dažādus pirmreizinātājus, jo jau piecu mazāko pirmskaitļu reizinājums ir lielāks par 1988. Tātad apskatāmie skaitļi ir formā $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} p_4^{a_4}$. Šādam skaitlim ir $(a_1+1)(a_2+1)(a_2+1)(a_2+1)$ dalītāju. Tā kā dalītāju skaits nav atkarīgs no tā, kādi ir pirmskaitļi, tad pirmskaitļus jāizvēlas mazākos: 2, 3, 5, 7.

Tālāk, aplūkojot visus gadījumus, atrodam, ka lielākais dalītāju skaits 40 ir skaitlim $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1680$.

38.27. Apzīmēsim daudzstūra virsotnes pēc kārtas ar burtiem $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$.

a) Ja $n = 2$, tad aplūkojam līniju $A_1 A_2 A_4 A_3 A_1$.

b) Ja $n = 2k$, tad der līnija

$A_1 A_{2k} A_{4k} A_{2k-1} A_{4k-1} A_{2k-2} \ldots A_{k+2} A_{3k+2} A_{k+1} A_{3k+1} A_{3k} A_k A_{3k-1} A_{k-1} A_{3k-2} \ldots A_2 A_{2k+1} A_1$.

Paralēli ir tikai nogriežņi $A_1 A_{2k}$ un $A_{3k+1} A_{3k}$.

Līdzīgi konstruē līniju gadījumā $n = 2k + 1$.

38.28. Aplūkosim Fibonači virkni: $F_1 = 1, F_2 = 2, F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, ja $k \geq 1$. Tās blakusstāvošie locekļi ir savstarpēji pirmskaitļi. Tiešām,

$(F_{k+1}, F_k) = (F_{k+1} - F_k, F_k) = (F_k, F_{k-1}) = \cdots = (F_2, F_1) = (2, 1) = 1$.

Pieņemsim pretējo, ka kādu no konstruētajām virknēm ω var izveidot, uzrakstot $k > 1$ vienādas virknes. Tad gan *a*, gan *b* burtu skaits virknē ω dalās ar *k*. Ar matemātisko indukciju viegli pierādīt, ka *a* un *b* burtu skaits virknē ω izsakās ar diviem blakus esošiem Fibonači virknes locekļiem. Iegūta pretruna.

38.29. Konstruējam ap punktu *O* regulāru daudzstūri, kura malas paralēlas novilktajām hordām. Konstruējam tā malu pagarinājumus līdzīgi tam, kā aprakstīts 38.24. uzdevumā. Līdzīgi kā 38.24. uzdevuma atrisinājumā pierādām, ka zilo un sarkano pagarinājumu summas ir vienādas. Ja daudzstūra malu garumi tiecas uz nulli, robežā iegūstam prasīto vienādību.

38.30. Pārrakstīsim doto vienādojumu šādi:

$a_{n+1} - k(a_n + 1) - (k+1)a_n = 2\sqrt{k(k+1)a_n(a_n+1)}$.

Kāpinot kvadrātā, iegūstam

$$a_{k+1}^2 + k^2\left(a_n^2 + 2a_n + 1\right) + \left(k^2 + 2k + 1\right)a_n^2 - 2a_{n+1}k\left(a_n + 1\right) -$$
$$2a_{n+1}(k+1)a_n + 2k(k+1)a_n\left(a_n + 1\right) = 4k(k+1)a_n\left(a_n + 1\right).$$

Vienādību pārveidojam formā

(1) $a_n^2 - 2a_n\left(k + a_{n+1} + 2ka_{n+1}\right) + \left(a_{n+1} - k\right)^2 = 0$.

Ievietojot šajā vienādībā *n* vietā $n+1$, pēc pārveidojumiem iegūstam

(2) $a_{n+2}^2 - 2a_{n+2}\left(k + a_{n+1} + 2ka_{n+1}\right) + \left(a_{n+1} - k\right)^2 = 0$.

No vienādībām (1) un (2) redzams, ka a_n un a_{n+2} ir kvadrātvienādojuma $t^2 - 2\left(k + a_{n+1} + 2ka_{n+1}\right)t + \left(a_{n+1} - k\right)^2 = 0$ saknes. Pēc Vjeta teorēmas $a_n + a_{n+2} = 2k + 2a_{n+1} + 4ka_{n+1}$; tātad

(3) $a_{n+2} = 2k + 2a_{n+1} + 4ka_{n+1} - a_n$.

Tā kā $a_1 = k$ un $a_2 = 4k(k+1)$ ir veseli skaitļi, tad no (3) seko, ka visi virknes locekļi ir veseli skaitļi. Tā kā virkne ir augoša, tad tie ir naturāli skaitļi.

38.31. No dotā vienādojuma seko, ka $3^n - 4$ dalās ar 5. Uzrakstīsim virkni $3^n - 4$ pēc moduļa 5: 4, 0, 3, 2, 4, 0, 3, 2, 4, … . Redzam, ka skaitlim *n* ir jādalās ar 2. Tātad $n = 2k$, un iegūstam vienādojumu

$$5^x \cdot 7^y = \left(3^k + 2\right)\left(3^k - 2\right).$$

Skaitļi $3^k + 2$ un $3^k - 2$ atšķiras par 4. Tātad abi tie nevar dalīties ne ar 5, ne ar 7. Tāpēc viens no šiem skaitļiem ir 5^x, otrs ir 7^y. Pārbaudām, ka $x = 1$ neder. Ja $x \geq 2$, tad skaitļa 5^x pēdējie divi cipari ir 25. Bet 7^y pēdējie divi cipari veido periodisku virkni ar periodu 07, 49, 43, 01. Redzam, ka ne skaitļa $5^x - 7^y$, ne skaitļa $7^y - 5^x$ pēdējie divi cipari nevar būt 04. Tātad dotajam vienādojumam nav atrisinājumu naturālos skaitļos.

38.32. Viena no grupām (apzīmēsim to ar *X*) satur vismaz 17 elementus. Sakārtosim tos augošā secībā:

$x_1 < x_2 < \cdots < x_{17}$.

Aplūkosim starpības $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_{17} - x_1$. No šīm starpībām vismaz 15 nav vienādas ar x_1. Ja kāda no šīm starpībām pieder grupai *X*, tad vajadzīgie skaitļi jau atrasti. Pretējā gadījumā vienai no atlikušajām grupām (teiksim *Y*) pieder vismaz 8 no šīm starpībām. Apzīmēsim tās ar $y_1 < y_2 < \cdots < y_8$. Apskatām starpības $y_2 - y_1, y_3 - y_1, \ldots, y_8 - y_1$. Apskatām tās piecas, kas nav vienādas ar y_1 vai x_1. Tālāk aplūkojam trīs variantus.

a) Kāda no starpībām pieder kopai *Y*. Tad vajadzīgie skaitļi jau atrasti.

b) Kāda no starpībām pieder kopai *X*. Ievērojot, ka

$y_j - y_1 = x_k - k_l$, tad kopā *X* prasītie skaitļi jau atrasti.

c) Visas 5 starpības pieder trešajai kopai *Z*. Aplūkojot dažādus gadījumus arī šajā gadījumā var pierādīt prasīto.

38.33. Ja $n = 1$, tad jāatrisina vienādojums $\sin x + \cos x = 1$;

$x \in \left\{2\pi k, \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right\}, k \in Z$.

Ja $n = 2$, tad jāatrisina vienādojums

$\sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2x - x) = 1$.

$x \in \{2\pi k\}, k \in Z$.

Ja $n > 2$, tad no vienādojuma seko

$1 \le |\sin x \sin 2x \cdots \sin nx| + |\cos x \cos 2x \cdots \cos nx| \le$

$|\sin x \sin 2x| + |\cos x \cos 2x| \le$

$\max(|\sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x|, |\sin x \sin 2x - \cos x \cos 2x|) =$

$\max(|\cos x|, |\cos 3x|)$.

Tātad par atrisinājumiem var derēt tikai tādi *x*, kuriem $|\cos x| = 1$ vai $|\cos 3x| = 1$. Ja $|\cos 3x| = 1$, tad $\sin 3x = 0$; tātad $|\cos x \cos 2x \cdots \cos nx| = 1$, tāpēc arī šajā gadījumā $|\cos x| = 1$.

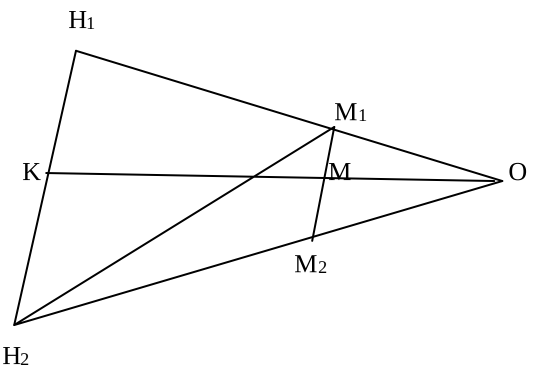
Risinot vienādojumu $|\cos x| = 1$, atbildes jāpārbauda.

Atrisinājums $x = 2\pi k, k \in Z$ der.

Atrisinājums $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$ der tad u tikai tad, kad $k = 4m$ vai $k = 4m + 3$.

38.34. Apzīmēsim ar *O* riņķa līnijas centru, ar *M* – doto 6 punktu smaguma centru, ar M_1 un H_1 -- viena trijstūra augstumu krustpunktu un mediānu krustpunktu, ar M_2 un H_2 -- papildtrijstūra augstumu krustpunktu un mediānu krustpunktu. Skaidrs, ka M_1M_2 viduspunkts ir *M*.

Zināms, ka katrā trijstūrī augstumu krustpunkts *H*, mediānu krustpunkts *M* un apvilktā riņķa centrs atrodas uz vienas taisnes šādā secībā, pie tam *HM* : *MO* = 2 : 1. (Eilera teorēma). Pierādījumam pietiek ievērot, ka pats trijstūris un tā malu viduspunktu veidotais trijstūris ir homotētiski ar centru *M* un koeficientu (-2); *O* ir mazā trijstūra augstumu krustpunkts un augstumu krustpunkti pie homotētijas pāriet viens otrā.



38.9. zīm.

No šejienes seko (skat. 38.9. zīm.), ka $H_1H_2 \parallel M_1M_2$ un $H_1H_2 : M_1M_2 = 2:1$. Izmantojot līdzīgus trijstūrus, viegli pierādīt, ka OM krusto H_1H_2 šī nogriežņa viduspunktā *K*, un, ka gan M_1H_2, gan M_2H_1 krusto taisni OM tādā punktā *L*, ka $LM : LK = 1:2$ un tātad $OM : OL = 3:2$. Tātad punktu *L* viennozīmīgi nosaka punkti *O* un *M*. Tas nozīmē, ka visas apskatāmās taisnes iet caur vienu punktu – punktu – *L*.

38.35. Pieņemsim, ka divi spēlētāji *M* un *N* met kauliņus pēc kārtas. Pirms šiem metieniem viņiem ir vienāds piena daudzums *a*. Pieņemsim, ka *M* uzmet *m* punktus, bet *N* – *n* punktus.

Tad aprēķinām, ka pēc šiem diviem metieniem *M* būs

$$\frac{(m+1)a-10}{m}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

litru piena, bet *N* būs

$$a\left(1+\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{n}\left(10-a\left(1+\frac{1}{m}\right)\right)$$

litru piena. Tālāko metienu rezultātā *M* un *N* saņems vienādu daudzumu piena. Tā kā beigās viņu piena daudzumi ir vienādi, tad

$$\frac{(m+1)a-10}{m}\left(1+\frac{1}{n}\right)=a\left(1+\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{n}\left(10-a\left(1+\frac{1}{m}\right)\right).$$

Pārveidojot, iegūstam, ka $m = n+1$.

Tātad citi spēlētāji uzmeta 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13 punktus.