Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 38. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

8. klase

38.1. Vai eksistē tāda kvadrātfunkcija $y = ax^2 + bx + c$, kurai vienlaikus ir spēkā šādi trīs nosacījumi:
ja $x = 1$, tad $y = 7$; ja $x = 5$, tad $y = 8$; ja $x = 9$, tad $y = 9$?

38.2. Dotas 4 aritmētiskās progresijas. To diferences ir attiecīgi 3, 4, 5 un 6. Pierādīt, ka var atrast tādu naturālu skaitli, kas nepieder nevienai no šīm progresijām.

38.3. a) Vai var atrast tādu naturālu skaitli, kas vienāds ar sešu dažādu savu dalītāju summu?
b) Vai var atrast tādu naturālu skaitli, kas vienāds ar 1988 dažādu savu dalītāju summu?
(Apskatām tikai pozitīvus dalītājus; punktos a) un b) runa iet par dažādiem skaitļiem.)

38.4. Sauksim divus trijstūru par gandrīz vienādiem, ja viena trijstūra divas malas un leņķis pret pirmo no tām attiecīgi vienādi ar trjstūra divām malām un leņķi pret pirmo no tām. Doti *n* trijstūri. Zināms, ka pirmais gandrīz vienāds ar otru, otrais gandrīz vienāds ar trešo, … , (*n* - 1)-ais gandrīz vienāds ar *n*-to. Bez tam zināms, ka pirmais trijstūris līdzīgs *n*-tajam. Vai pirmais trijstūris noteikti vienāds ar *n*-to?

38.5. Divi spēlētāji pēc kārtas iekrāso rūtiņas kvadrātā, kas sastāv no 8×8 rūtiņām. Pirmais spēlētājs ar katru savu gājienu nokrāso melnā krāsā divas rūtiņas ar kopēju malu, bet otrais ar katru savu gājienu nokrāso baltā krāsā vienu rūtiņu (vienu un to pašu rūtiņu spēles gaitā var nokrāsot vairākas reizes). Sākumā visas rūtiņas ir baltas. Vai otrais spēlētājs var panākt, lai pēc katra viņa gājiena katrā kvadrātā ar izmēriem 5×5 rūtiņas vismaz viena stūra rūtiņa būtu balta?

9. klase

38.6. Skaitļu virknē $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pastāv sakarība $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ (n = 2, 3, 4, …). Zināms, ka tās pirmie m locekļi ir pozitīvi. Kāda ir lielākā iespējamā m vērtība?

38.7. Dots, ka *ABCD* ir izliekts četrstūris. Paralelograma divas virsotnes atrodas malu *AB* un *CD* viduspunktos, bet divas citas virsotnes – uz malām *BC* un *AD*. Pierādīt, ka paralelograma laukums ir divas reizes mazāks par *ABCD* laukumu.

38.8. Skaitļu virknes $x_1; x_2; x_3; \ldots$ un $y_1; y_2; y_3; \ldots$ tiek veidotas šādi:

$$x_1 = \frac{3}{5}; \quad y_1 = \frac{4}{5}; \quad x_{n+1} = 2x_n \cdot y_n; \quad y_{n+1} = 2y_n^2 - 1, \text{ ja } n = 1; 2; 3; \ldots$$

Pierādīt, ka neviens no šo virkņu locekļiem nav lielāks par 1.

38.9. Dots, ka n – naturāls skaitlis. Pierādīt, ka kvadrātu var sadalīt $3 \cdot 2^{n-1} - 2$ kvadrātos tā, lai neviena taisne, kas paralēla kvadrāta malām, nekrustotu vairāk nekā n dalījumā iegūtos kvadrātus. (Saka, ka taisne krusto kvadrātu, ja tā iet caur šī kvadrāta iekšēju punktu.)

38.10. Nuļļu un vieninieku virkni sauc par k-universālu, ja tā satur kā fragmentus visas iespējamās nuļļu un vieninieku virknes garumā k (varbūt dažas no tām vairākas reizes). Piemēram, virkne 00110 ir 2-universāla, jo tā satur fragmentus 00, 01, 10, 11.

a) Kāds ir mazākais iespējamais 4-universālas virknes garums?

b) Kāds ir mazākais iespējamais k-universālas virknes garums?

(Virknes garums ir tajā ietilpstošo ciparu skaits.)

10. klase

38.11. a) Vai var atrast tādus x un y, ka vienlaikus ir spēkā nevienādības $|\sin x| > |\sin y|$ un $|\cos x| > |\cos y|$?

b) Vai var atrast tādus x un y, ka vienlaikus ir spēkā nevienādības $\sin x > \sin y$ un $\cos x > \cos y$?

38.12. Pierādīt, ka $20^{15} - 1$ dalās ar $19 \cdot 31$.

38.13. Izliektā četrstūrī *ABCD* punkts *O* ir diagonāļu krustpunkts. Dots, ka $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\left(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2\right)$. Pierādīt, ka vai nu *ABCD* diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras, vai arī vismaz viena no tām punktā O dalās uz pusēm.

38.14. Doti 10 skaitļi. Neviena skaitļa modulis nav mazāks par visu 9 pārējo skaitļu summas moduli. Pierādīt, ka visu 10 skaitļu summa ir 0.

38.15. Dots, ka $0 < x < \pi$ un $0 < y < 1$. Pierādīt, ka $(\sin x) \cdot y < \sin(xy)$.

11. klase

$m_1 + m_2 + m_3$

38.16. Vai tiesa, ka katrā platleņķa trijstūrī pastāv nevienādība $m_1 + m_2 + m_3 \leq p \cdot \sqrt{3}$, kur m_1, m_2, m_3 -- mediānu garumi, bet p – pusperimetrs?

38.17. Pierādīt nevienādību $\cos(x+y) + 2\cos x + 2\cos y + 3 \geq 0$.

38.18. Dots, ka 2^n un 5^n sākas ar vienu un to pašu ciparu (n – naturāls skaitlis). Kas tas var būt par ciparu?

38.19. Aprēķināt $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \left\lfloor \log_a \left\lfloor \frac{\lceil x \rceil}{x} \right\rfloor \right\rfloor dx$, ja $a > 1$, a – naturāls skaitlis. (Paskaidrojums: ar $\lfloor y \rfloor$ apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz y; ar $\lceil y \rceil$ apzīmē mazāko veselo skaitli, kas nav mazāks par y.)

38.20. Dots, ka $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pierādīt, ka vienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} \sqrt{x-a} + \sqrt{y-a} = 1 \\ \sqrt{y-b} + \sqrt{z-b} = 1 \\ \sqrt{z-c} + \sqrt{x-c} = 1 \end{cases}$$

eksistē atrisinājums.

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

8. un 9. Klases

38.21. Vai piecu pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums var būt naturāla skaitļa kvadrāts?

38.22. Izliekta n-stūra D_1 perimetrs ir P_1. Savienojot pēc kārtas D_1 malu viduspunktus, iegūstam izliektu daudzstūri D_2 ar perimetru P_2. Kādas vērtības var pieņemt attiecība $\frac{P_2}{P_1}$?

38.23. Dots n reālu skaitļu komplekts $< a_1, a_2, \ldots, a_n >$. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties patvaļīgu skaitli α un no dotā komplekta iegūt komplektu $< |\alpha - a_1|, |\alpha - a_2|, \ldots, |\alpha - a_n| >$.

Kāds ir mazākais gājienu skaits, ar kuru no jebkura komplekta noteikti var iegūt komplektu $< 0, 0, \ldots, 0 >$?

38.24. Riņķa līnijas iekšpusē atrodas piecstūris *ABCDE*, kura visu malu garumi ir vienādi. Malas pagarinātas līdz krustpunktiem ar riņķa līniju. Malas *AB* pagarinājums aiz *B*, *BC* pagarinājums aiz *C*, *CD* pagarinājums aiz *D*, *DE* pagarinājums aiz *E*, *EA* pagarinājums aiz *A* nokrāsoti zili; pieci pārējie pagarinājumi – sarkani. Pierādīt, ka zilo pagarinājumu summa vienāda ar sarkano pagarinājumu summu.

38.25. Katrs no naturālu skaitļu komplektiem $< a_1, a_2, \ldots, a_{50} >, < b_1, b_2, \ldots, b_{50} >$; $< c_1, c_2, \ldots, c_{50} >; < d_1, d_2, \ldots, d_{50} >$ pa reizei satur katru no skaitļiem 1, 2, 3, … , 50. Vai var pastāvēt vienādība

$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{50}b_{50} = 2(c_1d_1 + c_2d_2 + \cdots + c_{50}d_{50})$?

10. klase

38.26. Kuram no naturāliem skaitļiem no 1 līdz 1988 ir vislielākais dalītāju skaits?

38.27. Dots, ka $n \geq 2$, n – naturāls skaitlis. Pierādīt, ka var konstruēt slēgtu lauztu līniju ar $2n$ posmiem, kuras virsotnes sakrīt ar regulāra $2n$-stūra virsotnēm un starp kuras posmiem var atrast tieši vienu pāri savstarpēji paralēlu posmu.

38.28. Tiek aplūkotas burtu *a* un *b* virknītes *a*, *b*, *ab*, *bab*, *abbab*, *bababbab*, … (katru nākamo virknīti, sākot ar trešo, iegūst, uzrakstot abas iepriekšējās vienu otrai blakus). Pierādīt, ka nevienu no šīm virknītēm nevar iegūt, uzrakstot blakus vienu otrai kādu citu virknīti dažas (vairāk nekā vienu) reizes.

38.29. Caur punktu *O* riņķa līnijas iekšpusē novilkts nepāra skaits hordu. Tās sadala pilno leņķi pie *O* vienādās daļās. Šo hordu nogriežņi no *O* līdz riņķa līnijai pamīšus nokrāsoti sarkanā un zilā krāsā. Pierādīt, ka visu zilo nogriežņu summa vienāda ar visu sarkano nogriežņu summu.

38.30. Skaitļu virkne definēta šādi: $a_1 = k$, k – naturāls skaitlis, $a_{n+1} = k(a_n + 1) + (k+1)a_n + 2\sqrt{k(k+1)a_n(a_n+1)}$, ja $n \geq 1$. Pierādīt, ka visi šīs virknes locekļi ir naturāli skaitļi.

11. klase

38.31. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$5^x \cdot 7^y + 4 = 3^z.$$

38.32. Doti 49 naturāli skaitļi. Tie kaut ka sadalīti 3 grupās. Pierādīt, ka vienā no tām var atrast divus dažādus skaitļus, kuru summa arī pieder pie šīs pašas grupas.

38.33. Atrisināt vienādojumu

$$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \dots \cdot \sin nx + \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx = 1.$$

38.34. Uz riņķa līnijas atzīmēti 6 punkti. Izvēlamies 3 no tiem un atrodam to veidotā trijstūra mediānu krustpunktu un 3 pārējo punktu veidotā trijstūra augstumu krustpunktu. Pieņemot, ka šie krustpunkti ir dažādi, novelkam caur tiem taisni. Pierādīt, ka visas 20 šādi novilktās taisnes iet caur vienu punktu.

38.35. Ap galdu sēž desmit spēlētāji. Katram priekšā ir krūze, kurā ieliets 1 litrs piena. Visi spēlētāji pēc kārtas met pa 5 spēļu kauliņiem. Ja spēlētāja uzmesto skaitļu summa ir *s*, tad viņš katram citam spēlētājam ielej no savas krūzes $\frac{1}{s}$ tā piena daudzuma, kas šim spēlētājam krūzē jau ir. Zināms, ka pēc tam, kad visi spēlētāji pa reizei metuši kauliņus un lējuši pienu, visiem atkal krūzēs bija pa vienam litram. Pēdējais spēlētājs uzmeta summa 12. Kādas summas uzmeta pārējie spēlētāji?