Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 39. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

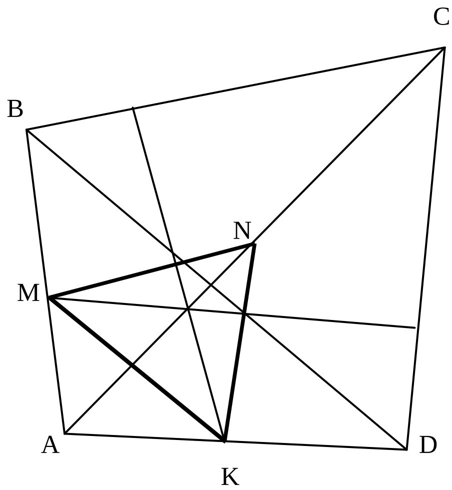
39.1. Apgalvojums seko no tā, ka no pirmā skaitļu trijnieka tiek izsvītroti 3 skaitļi, bet no katra nākošā trijnieka pa 2 skaitļiem.

39.2. Pieņemsim, ka sakrīt arī abu vienādojumu otrās saknes. Apzīmēsim vienādojumu saknes ar x_1 un x_2. Tad pēc Vjeta teorēmas
$a = -x_1 - x_2 = p$ un $b = x_1 x_2 = q$; tātad $(a-p)^2 + (b-q)^2 = 0$.
Iegūta pretruna.
Apzīmēsim vienādojumu kopīgo sakni ar x_1. Tad
$x_1^2 + ax_1 + b = 0$ un $x_1^2 + px_1 + q = 0.$
Atņemot no pirmās vienādības otro, iegūstam $(a-p)x_1 = q-b$. Ja $a-p=0$, tad arī $q-b=0$, bet tā ir pretruna ar doto. Tātad $x_1 = \frac{m}{n}$ -- racionāls skaitlis. Pieņemsim pretējo, ka tas nav vesels skaitlis, t.i., $n>1$. Tad iegūstam

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 + a\frac{m}{n} + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 + amn + bn^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 = -n(am+bn).$$

Pēdējās vienādības labā puse dalās ar *n*, bet kreisā nedalās. Tātad x_1 ir vesels skaitlis. No Vjeta teorēmas seko, ka arī pārējās saknes ir veseli skaitļi.

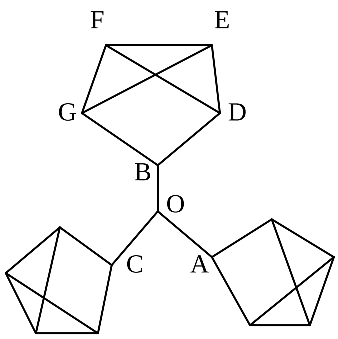
39.3. Apzīmēsim ar *M*, *N* un *K* attiecīgi nogriežņu *AB*, *AC* un *AD* viduspunktus. Tā kā trijstūra viduslīnija paralēla tā pamatam, tad abas novilktās taisnes un taisne *AC* ir taisnes, uz kurām atrodas trijstūra *MNK* augstumi. Tāpēc tās krustojas vienā punktā (skat. 39.3. zīm.).



39.3. zīm.

39.4. Pierādījums izmanto apgalvojumu, ka, novelkot diagonāli, kas krusto k jau iepriekš novilktās diagonāles, sadala divās daļās $k+1$ apgabalus un tātad palielina apgabalu skaitu par $k+1$.

39.5. Attēlosim skolēnus ar punktiem. Ja divi skolēni draudzējas, atbilstošos punktus savienosim ar līniju. Katrā punktā sanāk kopā 3 līniju gali. Tātad pavisam ir $3n$ gali. Tā kā katrai līnijai ir 2 gali, tad $3n$ ir pāra skaitlis. Tāpēc n ir pāra skaitlis.
Var gadīties, ka skolēnus neizdosies nosēdināt solos tā, lai katrā solā sēdētu draugi. Apskatīsim situāciju, kas parādīta 39.4. zīmējumā.



39.4.zīm.

Pieņemsim, ka O sēž vienā solā ar A (citi gadījumi ir analoģiski). Tad 5 skolēni B, D, E, F, G var sēdēt kopā tikai ar saviem biedriem no šīs grupas. Bet 5 skolēnus nevar sasēdināt solos pa 2.

39.6. Apzīmējam AA_1 un B_1C_1 viduspunktus attiecīgi ar *M* un *N*. Atrodam *ABCD* centru *O* kā *AC* un *BD* krustpunktu. Ar *K* apzīmējam *N* projekciju uz *BC* – *BC* viduspunktu. Tad $S = MN \cap AK$ pieder gan šķēluma plaknei *α*, gan *ABCD* plaknei. *SO* ir α un *ABCD* šķēluma taisne. Atrodam $R = SO \cap AD$ un $T = SO \cap BC$. Atrodam uz A_1B_1 tādu punktu *V*, ka $NV \parallel RT$. Meklējamais šķēlums ir *NVMRT*.

39.7. Ja kāds no skaitļiem *a* un *b* dalās ar 3, tad dotais reizinājums dalās ar 3. Ja tie abi dod vienādus atlikumus, dalot ar 3, tad to starpība dalās ar 3. Atliek gadījums, kad viens no skaitļiem dod atlikumu 1, dalot ar 3, otrs – 2. Tādā gadījumā $a+b$ dalās ar 3. Visos gadījumos reizinājums dalās ar 3.

Tā kā $a+b$ ir pāra skaitlis un $(a,b)=1$, tad abi skaitļi *a* un *b* ir nepāra skaitļi.

a) ja $a \equiv b \equiv 1 \pmod 4$, tad $a+b$ dalās ar 2, bet $a-b$ dalās ar 4,

b) ja $a \equiv b \equiv -1 \pmod 4$, tad $a+b$ dalās ar 2, bet $a-b$ dalās ar 4,

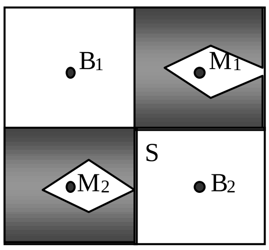
c) ja $a \equiv 1 \pmod 4$ un $a \equiv -1 \pmod 4$, tad $a+b$ dalās ar 4, bet $a-b$ dalās ar 2,

d) ja $a \equiv -1 \pmod 4$ un $a \equiv 1 \pmod 4$, tad $a+b$ dalās ar 4, bet $a-b$ dalās ar 2.

Redzam, ka visos gadījumos dotais reizinājums dalās ar 8.

Tā kā reizinājums dalās gan ar 3, gan ar 8, tad tas dalās ar 24.

39.8. Sadalīsim šaha galdiņu 16 kvadrātos pa 4 rūtiņām katrā un pierādīsim, ka $OB_1 + OB_2 = OM_1 + OM_2$ (skat. 39.5. zīm.). Summējot šādas vienādības, iegūsim prasīto.



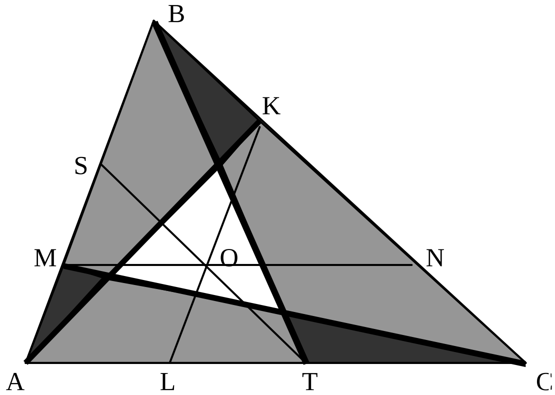
39.5. zīm.

Ievērosim, ka B_1B_2 un M_1M_2 viduspunkti sakrīt ar punktu *S*. Tātad

$OB_1 + OB_2 = 2OS = OM_1 + OM_2$.

39.9. Apzīmēsim baltā trijstūra laukumu ar S_1, pelēko laukumu summu ar S_2, bet melno trijstūru laukumu summu ar S_3 (skat. 39.6. zīm.). Atzīmēsim, ka $S_1 + S_2 + S_3 = S_{ABC}$.

No otras puses $2S_3 + S_2 = S_{AMC} + S_{BKA} + S_{CTB} = S_{AOC} + S_{BOA} + S_{BOC} = S_{ABC}$.
Salīdzinot šīs vienādības, iegūstam, ka melno trijstūru laukumu summa S_3 ir vienāda ar baltā trijstūra laukumu S_1.



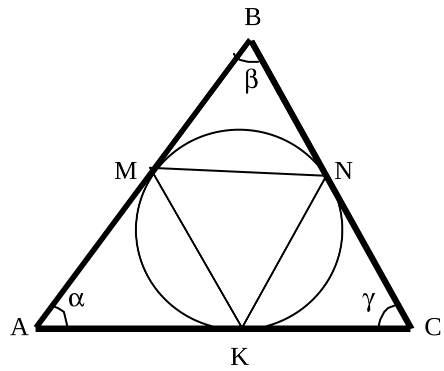
39.6. zīm.

39.10. Pierādīsim, ka (n_k) ir augoša virkne. Tad $n_k \geq k$, bet no nevienādības $n_{k+1} > n_{n_k}$ seko, ka $n_k < k+1$. Tātad $n_k = k$.
Tā kā jebkuru virknes locekli, izņemot n_1, var uzskatīt par n_{k+1}, tad jebkuram virknes loceklim, izņemot n_1, eksistē par to mazāks loceklis n_{n_k}. Tātad n_1 ir mazākais virknes loceklis.
No sakarības $n_{k+1} > n_{n_k}$ seko, ka visi citi virknes locekļi, izņemot n_1, ir lielāki par 1.
Apskatām virkni $m_i = n_{i+1} - 1$. Viegli pārbaudīt, ka virknei (m_k) piemīt tā pati īpašība, kas sākotnējai virknei. Tāpēc tās mazākais loceklis ir $n_2 - 1 = m_1$, t.i., virknē (n_k) otrais mazākais loceklis ir n_2.
Līdzīgi, no virknes (m_i) izveidojot nākošo virkni, iegūstam, ka (n_k) trešais mazākais loceklis ir n_3, utt. Tātad (n_k) ir augoša, ko arī vajadzēja pierādīt.

39.11. Jā, var. Piemēram, no visām apakšējās skaldnes virsotnēm novelkam vektorus uz augšējās skaldnes centru, bet no augšējās skaldnes virsotnēm – uz apakšējās skaldnes centru.

39.12. Skaidrs, ka dotās izteiksmes vērtība nav lielāka par 2. Lai tā būtu 2, jāatrod tādi veseli *m*, *n* un tāds *x*, ka vienlaicīgi $5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ un $1989x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$. Var ņemt, piemēram, šādas vērtības: $n = 1,\ m = 497,\ x = \frac{\pi}{2}$.

39.13. Apzīmēsim trijstūra *ABC* leņķus ar α, β un γ (skat. 39.7. zīm.).



39.7. zīm.

Tā kā MBN ir vienādsānu trijstūris, tad $\angle BMN = 90° - \frac{\beta}{2}$. Līdzīgi $\angle AMK = 90° - \frac{\alpha}{2}$; tāpēc $60° = \angle NMK = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Analoģiski iegūstam, ka $\frac{\alpha + \gamma}{2} = 60°$ un $\frac{\beta + \gamma}{2} = 60°$. No šīm vienādībām seko, ka $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.

39.14. Apskatām tos skolēnus, starp kuriem attālums ir vismazākais. Skaidrs, ka viņi šauj viens uz otru. Ja vēl kāds šauj uz vienu no šiem abiem, tad, tā kā divi skolēni šauj uz vienu un to pašu, tad būs tāds skolēns, uz kuru nešauj neviens.
Ja uz šiem skolēniem neviens nešauj, tad varam tos atmest un līdzīgi aplūkot atlikušos 1987 skolēnus, utt., kamēr paliks viens skolēns, uz kuru nav kam šaut.

39.15. Katrs no n saskaitāmajiem ir vienāds ar “+ 1” vai “- 1”. Tā kā to summa ir 0, tad n ir pāra skaitlis.
Pieņemsim, ka $\frac{n}{2}$ ir nepāra skaitlis. Ievērosim, ka starp saskaitāmajiem ir $\frac{n}{2}$ skaitļi “+1” un $\frac{n}{2}$ skaitļi “-1”. Tātad visu saskaitāmo reizinājums būtu “-1”, bet šis reizinājums satur katru skaitli x_i ceturtajā pakāpē, tātad nevar būt negatīvs. Iegūtā pretruna pierāda, ka $\frac{n}{2}$ ir pāra skaitlis un n dalās ar 4.

39.16. Apzīmēsim $f(0)$ ar a. Tad no vienādības $f'(x) = a$ seko, ka $f(x) = ax + b$. Tālāk iegūstam $b = f(0) = f'(x) = (ax + b)' = a$. Pārbaude parāda, ka jebkura funkcija $f(x) = ax + a$ apmierina uzdevuma nosacījumus.

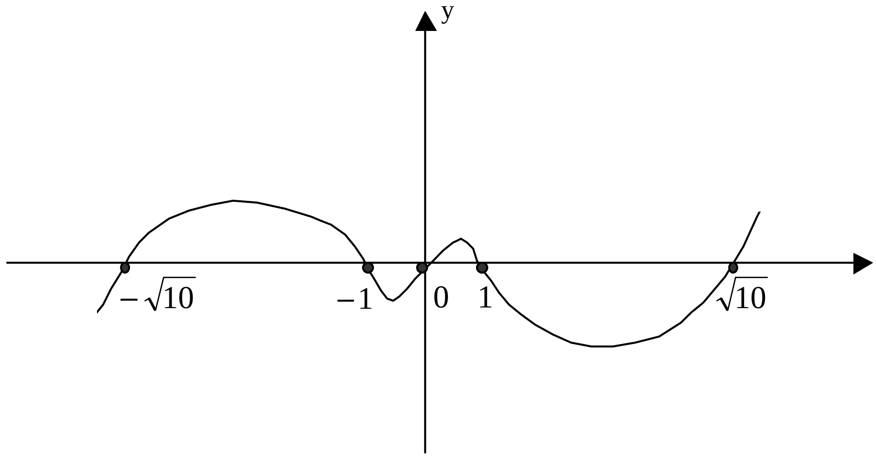
39.17. Vispirms pierāda, ka visu 6 mazo trijstūru laukumi ir vienādi. Tālāk katram no šiem trijstūriem uzrakstām formulu $R = \frac{abc}{4S}$. Tagad viegli pārbaudīt, ka $R_1R_3R_5 = R_2R_4R_6$.

39.18. Nokrāsosim kvadrāta horizontāles pamīšus melnā un baltā krāsā. Katrs horizontāli novietots kauliņš noklāj pāra skaitu baltās rūtiņas. Katrs vertikāli novietots kauliņš pārklāj 1 balto rūtiņu. Tā kā pavisam ir 50 baltas rūtiņas, tad vertikāli novietoto kauliņu skaitam ir jābūt pāra skaitlim; tāpēc to skaits nevar būt 25.

39.19. Pārveidojot doto vienādību, iegūstam sakarību $\frac{\sin^2 x}{a} = \frac{\cos^2 x}{b}$; apzīmēsim $\frac{\sin^2 x}{a} = \frac{\cos^2 x}{b} = M$. Pierādāmo vienādību var pierakstīt formā

$a \cdot M^n + b \cdot M^n = (a+b) \cdot M^n$, kas ir acīmredzama.

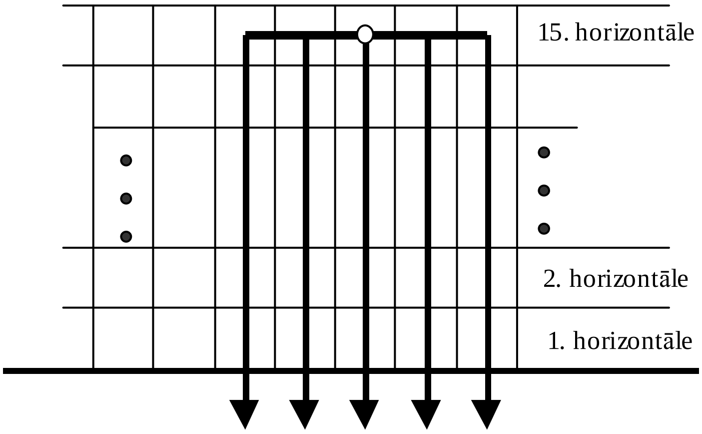
30.19. Apskatīsim funkcijas $y = x(x^2 - 1)(x^2 - 10)$ grafiku (skat. 39.8. zīm.).



39.8. zim,

Aplūkosim taisni $y = c$, kur $c > 0$. Tā var krustot funkcijas grafiku 5 punktos; divos starp $-\sqrt{10}$ un -1, divos starp 0 un 1 un vienā aiz $\sqrt{10}$. Starp 0 un 1 nav veselu skaitļu; tātad vienādojumam $x(x^2 - 1)(x^2 - 10) = c$ nevar būt vairāk par 3 veselām saknēm. Līdzīgi aplūko gadījumu $c < 0$.

30.20. Aplūkosim 5 no iespējamajiem ceļiem ārā no pusplaknes (skat. 39.9. zīm.)



39.9. zīm.

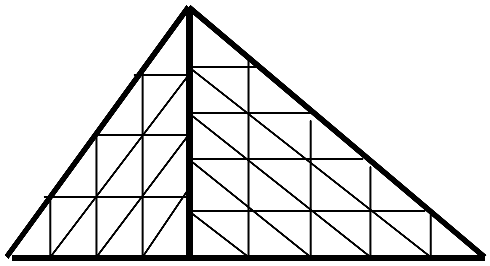
Šie ceļi kopā pusplaknē aizpilda taisnstūri ar izmēriem 5×15. Tajos ierakstīto skaitļu summa nepārsniedz $3\cdot88=264$. Summējot skaitļu summu visos no pieciem ceļiem vēl papildus varam pieskaitīt četrkāršotu izejas rūtiņas cenu (20 rieksti) un blakusrūtiņu cenu (10 rieksti, šeit iet divi ceļi). Kopā tas sastāda 294 riekstus. Tā kā $59\cdot5=295>294$, tad vismaz viena ceļa izmaksas ir mazākas par 59 riekstiem.

39.22. Atzīmēsim, ka skaitļu $a+b$ un $|a-b|$ paritātes sakrīt. Tātad aplūkojot tabulu pēc moduļa 2, iegūstam šādu tabulu:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a & & b & & c & & d & & e & & f \\
 & a+b & & b+c & & c+d & & d+e & & e+f & \\
 & & a+2b+c & & b+2c+d & & c+2d+e & & d+2e+f & & \\
 & & & a+3b+3c+d & & b+3c+3d+e & & c+3d+3e+f & & & \\
 & & & & a+4b+6c+4d+e & & b+4c+6d+4e+f & & & & \\
 & & & & & a+5b+10c+10d+5e+f & & & & &
\end{array}
$$

Visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir $6(a+f)+20(b+e)+34(c+d)$, tātad pāra skaitlis. Bet $1+2+3+\cdots+21=21\cdot11$ ir nepāra skaitlis. Iegūta pretruna, tātad skaitļus aplīšos prasītajā veidā ierakstīt nevar.

30.23. Aplūkosim taisnleņķa trijstūri ABC ar katetēm $AC=30$ un $BC=33$. Novilksim tā augstumu CH. Tas sadala trijstūri ABC divos līdzīgos trijstūros. Trijstūra ACH malas sadalīsim 30 vienādās daļās un caur šiem punktiem novilksim taisnes paralēlas trijstūra malām. Tas sadalīsies 30^2 trijstūros, kas līdzīgi sākotnējam un hipotenūzas garums ir 1. . Trijstūra *BCH* malas sadalīsim 33 vienādās daļās un caur šiem punktiem novilksim taisnes paralēlas trijstūra malām. Tas sadalīsies 33^2 trijstūros, kas līdzīgi sākotnējam un hipotenūzas garums ir 1. Tā kā $30^2+33^2=1989$, tad prasītais sadalījums ir atrasts. Zīmējumā parādīts analoģisks sadalījums trijstūrim ar malām 4 un 5.



39.10. zīm.

39.24. Vispirms pierāda, ka pozitīviem skaitļiem *a* izpildās nevienādība

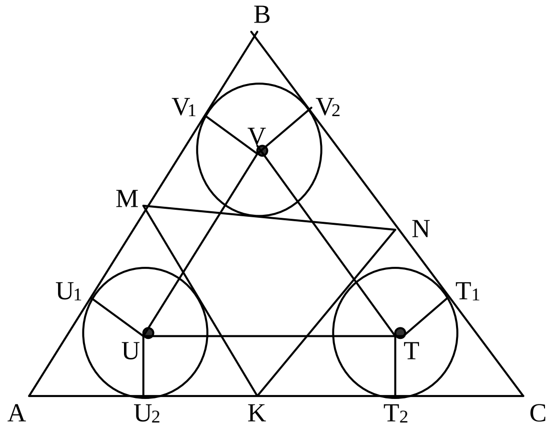
$$\frac{a-1}{(1+a^2)(1+a)}\le\frac{a-1}{4}.$$

Sākotnējā nevienādībā, pārnesot nevienādības labās puses izteiksmi uz kreiso pusi, iegūstam

$$\left(\frac{x_1}{1+x_1^2}-\frac{1}{1+x_1}\right)+\left(\frac{x_2}{1+x_2^2}-\frac{1}{1+x_2}\right)+\cdots+\left(\frac{x_n}{1+x_n^2}-\frac{1}{1+x_n}\right)=$$
$$\frac{x_1-1}{(1+x_1^2)(1+x_1)}+\frac{x_2-1}{(1+x_2^2)(1+x_2)}+\cdots+\frac{x_n-1}{(1+x_n^2)(1+x_n)}\le$$
$$\frac{x_1-1}{4}+\frac{x_2-1}{4}+\cdots+\frac{x_n-1}{4}=\frac{(x_1+x_2+\cdots x_n)-n}{4}=0.$$

Ko arī vajadzēja pierādīt.

39.25. Apzīmēsim trijstūros *AMK*, *MBN* un *KNC* ievilkto riņķa līniju centrus atbilstoši ar *U*, *V* un *T* (skat. 39.11. zīm.).



39.11. zīm.

Tā kā šajos trijstūros ievilkto riņķu rādiusi ir vienādi ar r_1, tad trijstūra *UVT* malas ir paralēlas trijstūra *ABC* malām un atrodas attālumā r_1 no tām. Tā kā *U*, *V* un *T* atrodas uz leņķu $\angle BAC$, $\angle ABC$ un $\angle BCA$ bisektrisēm, tad trijstūriem *ABC* un *UVT* ir viens un tas pats bisektrišu krustpunkts – ievilktās riņķa līnijas centrs. Apzīmēsim trijstūrī *UVT* ievilktā riņķa rādiusu ar r_3. Tad no iepriekšminētā seko, ka $r = r_1 + r_3$. Lai pierādītu uzdevumā prasīto, pietiek pierādīt, ka $r_3 = r_2$. To pierāda, pierādot, ka trijstūriem *UVT* un *MNK* ir gan vienādi laukumi, gan vienādi perimetri; tad ievilkto riņķu rādiusu vienādība sekos no formulas $r = \frac{S}{p}$.

39.26. Apskatām patvaļīgu sējumu ar numuru a_1, kas neatrodas savā vietā. Pieņemsim, ka tas atrodas a_2-ā sējuma vietā, a_2-ais sējums atrodas a_3-ā sējuma vietā, … , a_{n-1}-ais sējums atrodas a_n-ā sējuma vietā, a_n-ais sējums atrodas a_1-ā sējuma vietā. Teiksim, ka $a_1, a_2, \ldots, a_n$ veido ciklu ar garumu *n*.

Skaidrs, ka bibliotekārs katrā gājienā maina vietām divus sējumus, kas pieder vienam ciklam un atrodas tajā blakus. Varam pieņemt, ka tiek mainīti sējumi a_1 un a_n. Tad a_1-ais sējums nonāk savā vietā, bet cikls $a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_n \to a_1$ pārveidojas par ciklu $a_2 \to a_3 \to \cdots \to a_n \to a_2$. Tātad vienā gājienā viena cikla garums samazinās par 1. Pieņemsim, ka sākumā ir *t* cikli ar garumiem $k_1, k_2, \ldots, k_t$. Tad bibliotekāram ir jāizdara $(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \cdots + (k_t - 1)$ gājieni, lai sakārtotu grāmatas. Šis lielums ir atkarīgs tikai no grāmatu sākotnējā sakārtojuma.

39.27. Pārveidosim doto vienādību formā
$c(a + b) = ab$

Apzīmēsim $(a,b)=d$; tad $a=\alpha\cdot d$ un $b=\beta\cdot d$. Tā kā *a, b*, un *c* lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad $(d,c)=1$. Arī $(\alpha,\beta)=1$. Iegūstam vienādību

$cd(\alpha+\beta)=\alpha\beta\cdot d^2 \quad \Leftrightarrow \quad c(\alpha+\beta)=\alpha\beta\cdot d$.

Tā kā $(d,c)=1$ un $(\alpha+\beta,\alpha\beta)=1$, tad $\alpha+\beta=d$ un $c=\alpha\beta$. No šejienes iegūstam $a+b=(\alpha+\beta)\cdot d=d^2$, ko arī vajadzēja pierādīt.

39.28. Ar matemātisko indukciju pierādām, ka

$$x_{n+1}=\frac{x_1x_2}{(2^n-2)\cdot(x_1-x_2)+x_1}.$$

Skaitītājs ir konstants lielums. Ja $x_1\neq x_2$, tad saucējs pēc moduļa tiecas uz bezgalību, ja $n\to\infty$. Tāpēc bezgalīgi daudzi virknes (x_n) locekļi nevar būt naturāli skaitļi. Tātad jābūt $x_1=x_2$. Tādā gadījumā visi virknes locekļi ir vienādi. Tāpēc bezgalīgi daudzi virknes (x_n) locekļi ir naturāli skaitļi tad un tikai tad, ja $x_1=x_2\in N$.

39.29. Apgalvojumu pierāda, izmantojot vektoru pseidoskalārā reizinājuma jēdzienu.

39.30. Apskatīsim patvaļīgu krāsojumu *m* krāsās, pie kura katrā pļaviņā satiekas tikai dažādu krāsu taciņas. Pieņemsim, ka *i*-jā krāsā nokrāsotas S_i taciņas. Apskatīsim summu $S=|S_1-n|+|S_2-n|+\cdots+|S_m-n|$. Sauksim to par globālo novirzi. Aplūkosim krāsojumu, kuram globālā novirze ir vismazākā. Pieņemsim, ka tā nav 0. Ja mēs parādīsim, ka var atrast jaunu krāsojumu ar mazāku globālo novirzi, būs iegūta pretruna; tātad minimālā globālā novirze ir 0, bet tas nozīmē, ka atbilstošajā krāsojumā katra krāsa izmantota tieši *n* reizes.

Tātad pieņemsim, ka dots krāsojums, kuram globālā novirze nav 0. Tad eksistē tādi *i* un *j*, ka $S_i<n$ un $S_j>n$, jo $S_1+S_2+\cdots+S_m=mn$. Katrā pļaviņā ieiet ne vairāk kā viena *i*-tās krāsas taciņa un ne vairāk kā viena *j*-tās krāsas taciņa. Tātad visas *i*-tās un *j*-tās krāsas taciņas sadalās noslēgtās vai nenoslēgtās virknēs, kurām krāsas mainās pamīšus. Tā kā $S_i<n<S_j$, tad jābūt tādai virknei, kurā *j*-tās krāsas taciņu ir par 1 vairāk nekā *i*-tās krāsas taciņu. Ja šajā virknē *i*-to un *j*-to krāsu mainīsim vietām, iegūsim jaunu pieļaujamu krāsojumu, kurā S_i ir palielinājies par 1, bet S_j samazinājies par 1; tātad globālā novirze samazinājusies.

39.31. Apskatīsim visus 100 veidus, kā pirmo simtstūri var uzlikt uz otrā. Katra virsotne tikai vienā no šiem veidiem sakrīt ar virsotni, kurai ir tāds pats numurs. Tātad pa visiem 100 veidiem kopā ir tieši 100 numuru sakrišanas. Ja kādā no uzlikšanām realizējas vairāk nekā viena sakrišana, tad kādā citā uzlikšanā nerealizējas neviena.

Pieņemsim pretējo, ka katrā salikšanā realizējas tikai viena sakrišana. Sanumurēsim visas pirmā simtstūra virsotnes pa apli ar skaitļiem no 1 līdz 100. Otrā simtstūra virsotnes ir skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Tā kā, pagriežot otru simtstūri jebkurā pozīcijā, viena no otrā simtstūra virsotnēm atbilst pirmā simtstūra virsotnēm, tad starpības $(a_i - i)$ pieņem visas vērtības no 0 līdz 99. Tātad

$$0 + 1 + 2 + \cdots + 99 \equiv (a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \cdots (a_{100} - 100) \equiv$$
$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}) - (1 + 2 + \cdots + 100) = 0 \pmod{100}.$$

Bet $0 + 1 + 2 + \cdots + 99 = 49500$ nav kongruents ar 0 pēc moduļa 100.

39.32. To var izdarīt. Pirmās piramīdas viena šķautne sakrīt ar AA_1, otrās piramīdas viena šķautne sakrīt ar B_1C_1, trešās piramīdas viena šķautne sakrīt ar CD. Visu piramīdu pretējās šķautnes iet caur kuba centru.

39.33. Pieņemsim pretējo, ka vienādojumam

(1) $\quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$

eksistē atrisinājums veselos skaitļos (x_0, y_0, z_0) un $z_0 \neq 0$.

Meklēsim tādu *t*, lai skaitļi $x_0 + t,\ y_0 + t,\ z_0(1 + t)$ būtu vienādojuma

(2) $\quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$

atrisinājums. Iegūstam

(3) $\quad (ax_0^2 + by_0^2 + cy_0^2)t^2 + cz_0^2(1 + 2t) = 1.$

Tā kā $(ax_0^2 + by_0^2 + cy_0^2) = 0$, tad $cz_0^2(1 + 2t) = 1$; no kurienes

$$t = \frac{1 - cz_0^2}{2cz_0^2}.$$

Esam ieguvuši vienādojuma (2) atrisinājumu racionālos skaitļos. Tā ir pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

39.34. Aplūkosim polinomu

$Q(x) = 2\left(C_{x-1}^0 + C_{x-1}^1 + C_{x-1}^2 + \cdots + C_{x-1}^n\right)$, kur

$$C_x^k = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k};\ C_x^0 = 1.$$

Skaidrs, ka $Q(x)$ ir *n*-tās pakāpes polinoms. Aprēķināsim $Q(i),\ i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$.

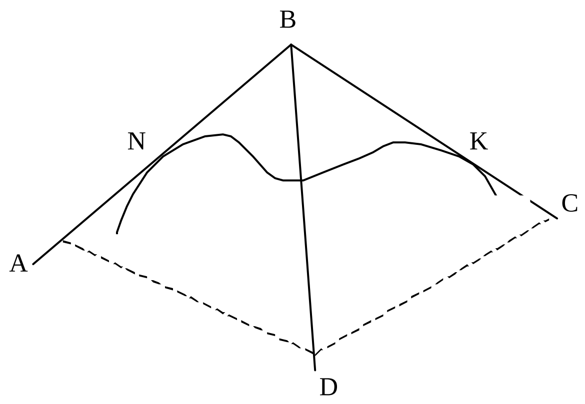
Tā kā $C_m^n = 0$, ja $n > .m$, tad

$$Q(i) = 2\left(C_{i-1}^0 + C_{i-1}^1 + \cdots + C_{i-1}^{i-1}\right) = 2 \cdot 2^{i-1} = 2^i = P(i).$$

Redzam, ka divi *n*-tās pakāpes polinomi pieņem vienādas vērtības $n + 1$ punktā. Tātad tie ir vienādi (lai to pierādītu, aplūkojiet polinomu starpību!). Tāpēc

$$P(n+2) = Q(n+2) = 2(C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + \cdots + C_{n+1}^n) =$$
$$2(C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + \cdots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1}) - 2 = 2^{n+2} - 2.$$

39.35. Izveidojam no trim stariem *BA*, *BD* un BC kustīgu "trijkāji" ar leņķiem $\angle ABD = \angle DBC = 60°$ un pārvietojam to tā, lai līnijas viduspunkts atrastos uz stara *BD*, visa līnija atrastos leņķa *ABC* iekšpusē, bet leņķa malas pieskartos līnijai (skat. 39.12. zīm.).



39.12. zīm.

Konstruējam dotā izmēra rombu, kura malas atrodas uz stariem *BA* un *BC*. Var pierādīt, ka visa līnija atrodas romba iekšpusē.