Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 40. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

9. klase

40.1. Dots, ka *a*, *b*, *c* ir pozitīvi skaitļi. Vai var gadīties, katram no trim vienādojumiem

$$ax^2+bx+c=0,\quad bx^2+cx+a=0,\quad cx^2+ax+b=0$$

ir saknes?

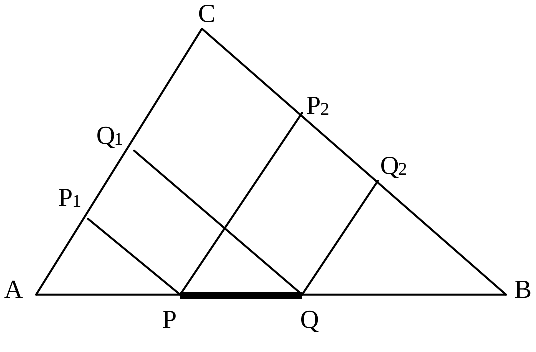
40.2. Zināms, ka 10 dažādi pozitīvi skaitļi veido aritmētisku progresiju. Vai var gadīties, ka

a) 4 no tiem veido ģeometrisku progresiju;

b) 5 no tiem veido ģeometrisku progresiju?

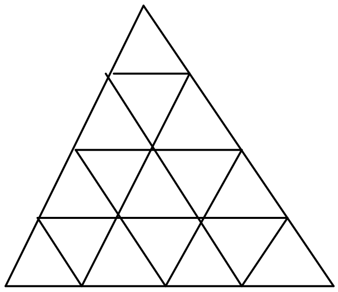
40.3. Dotas 4 pēc ārējā izskata vienādas monētas; to

40.4. Uz trijstūra *ABC* malas *AB* atzīmēts nogrieznis *PQ* ar konstantu garumu *a*. Novilkti nogriežņi $PP_2 \parallel AC$, $QQ_2 \parallel AC$, $PP_1 \parallel BC$, $QQ_1 \parallel BC$ (40.1. zīm.). Pierādīt, ka trapeču PP_1Q_1Q un PP_2Q_2Q laukumu summa nav atkarīga no tā, kurā vietā uz malas *AB* atzīmēts nogrieznis *PQ*.



40.1. zīm.

40.5. No 16 maziem vienādiem regulāriem trijstūriem izveidots viens liels regulārs trijstūris (40.2. zīm.). Katra no mazo trijstūrīšu 15 virsotnēm nokrāsota melna vai balta. Pierādīt, ka no šīm virsotnēm var izvēlēties trīs tādas, kas nokrāsotas vienā krāsā un atrodas vienādos attālumos viena no otras.



40.2. zīm.

10. klase

40.6. Telpā atradās regulārs piecstūris. Tā virsotnes ar paralēlās projekcijas palīdzību projicēja vienā plaknē α. Pēc tam vienas virsotnes projekciju nodzēsa; palika tikai četru pārējo virsotņu projekcijas. Tās neatrodas uz vienas taisnes. Kā ar cirkuļa un lineāla palīdzību atjaunot nodzēsto punktu? Visas konstrukcijas drīkst izdarīt tikai plaknē α.

40.7. Cik daudzas no $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ vērtībām vienlaikus var būt pozitīvas? Atrast visas iespējas un pierādīt, ka citu bez atrastajām nav.

40.8. Dota riņķa līnija ω_1 un tās horda *OC*. Riņķa līnija ω_2 ar centru *O* krusto hordu *OC* punktā *D*, kas atšķiras no *C*, bet riņķa līniju ω_1 -- punktos *A* un *B*. Pierādīt, ka punkts *D* ir trijstūra *ABC* bisektrišu krustpunkts.

40.9. Kādu lielāko daudzumu naturālu skaitļu, kas nepārsniedz 360, var izvēlēties tā, lai neviens no tiem nebūtu pirmskaitlis, bet katru divu izraudzīto skaitļu lielākais kopīgais dalītājs būtu 1?

40.10. Funkcija $F(x)$ definēta visam naturālam *x* vērtībām. Patvaļīgiem naturāliem skaitļiem *a* un *b*, kuru reizinājums pārsniedz 1990, pastāv vienādība $F(a+b) = F(ab-1990)$.

Atrast visas šādas funkcijas $F(x)$.

11. klase

40.11. Doti 1990 dažādi polinomi. Pierādīt, ka vismaz viens no tiem nav neviena cita dotā polinoma atvasinājums.

40.12. Atrast izteiksmes

$$\frac{\sin 3x + \cos x}{\sin 2x + \cos 2x}$$

lielāko iespējamo vērtību.

40.13. Dots riņķis ar rādiusu 1. Tā iekšpusē atrodas divi trijstūri, katrs ar laukumu 1. Pierādīt, ka eksistē punkts, kas pieder pie abiem trijstūriem.

40.14. Doti 8 vienādi kubi ar šķautnes garumu 1. No to 48 skaldnēm 24 skaldnes nokrāsotas baltas, bet 24 skaldnes – melnas. Pierādīt, ka no šiem 8 kubiem var salikt vienu tādu kubu, uz kura virsmas ir vienāds daudzums balto un melno kvadrātiņu ar malas garumu 1.

40.15. Ir zināms, ka $133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = n^5$, n – naturāls skaitlis. Atrast n. (Atbilde jādod decimālajā pierakstā.)

12. klase

40.16. Cik pozitīvu atrisinājumu ir vienādojumam $x^x = 2$?

40.17. Trijstūris *ABC* ir ortogonāli projicēts katrā no trim savstarpēji perpendikulārām plaknēm. Visas projekcijas ir šaurleņķa trijstūri. Vai var būt, ka *ABC* ir platleņķa trijstūris?

40.18. Taisnstūra *ABCD* iekšpusē ņemts punkts *M*. Dots, ka $\angle BMC + \angle AMD = 180°$. Aprēķināt $\angle BCM + \angle DAM$.

40.19. Plaknē doti 1990 punkti. Daži no tiem nokrāsoti sarkani, pārējie – zili. Nekādi 3 vienādi nokrāsoti punkti neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka var atrast tādus 3 punktus *A*, *B*, *C*, kas visi nokrāsoti vienā un tai pašā krāsā, turklāt taisnes nogrieznis *BC* nesatur nevienu otras krāsas punktu.

40.20. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^5 - x^3 - x^2 + 1 = y^2$.

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

9. un 10. Klases

40.21. Apskatām pirmo 1990 naturālu skaitļu kopu $S=\{1;2;3;\ldots;1990\}$. Katrai S apakškopai, kas satur vismaz vienu elementu, atrodam šīs apakškopas lielākā un mazākā elementa summu (ja kāda apakškopa A sastāv no viena skaitļa, tad šo skaitli uzskatām gan par A lielāko, gan mazāko elementu). Atrast visu šādi iegūstamo summu vidējo aritmētisko.

40.22. Uz tāfeles uzrakstīti četri pozitīvi skaitļi a, b, c, d, turklāt zināms, ka $ab+ac+ad+bc+bd+cd=1$. Pierādīt, ka var nodzēst vienu no skaitļiem tā, lai atlikušo skaitļu summa būtu mazāka par $\sqrt{2}$.

40.23. Pierādīt, ka kvadrātu var sagriezt trīs līdzīgos četrstūros, starp kuriem nekādi divi nav vienādi savā starpā.

40.24. Starp izliekta piecstūra $ABCDE$ malām un diagonālēm nav savstarpēji paralēlu nogriežņu. Apzīmēsim malas AB un diagonāles CE pagarinājumu krustpunktu ar O; uz malas AB atzīmēsim bultiņu, kas vērst uz O pusi. Līdzīgi atzīmējam bultiņas uz citām piecstūra malām. Pierādīt, ka vismaz uz vienu no piecstūra virsotnēm vērstas divas bultiņas.

40.25. Vai var atrast četrus tādus naturālus skaitļus, lai, katru divu reizinājumam pieskaitot 1990, iegūtu kaut kāda naturāla skaitļa kvadrātu?

11. klase

40.26. Uz leņķa malām ņemti punkti M un N, kas atšķiras no virsotnes (katrs uz savas leņķa malas). Konstruētas divas dažādas riņķa līnijas, katra no tām pieskaras nogrieznim MN un abām leņķa malām. Caur to centriem novilktas taisnes paralēli MN. Pierādīt, ka četrstūrī, kura virsotnes ir šo taišņu krustpunkti ar leņķa malām, var ievilkt riņķa līniju.

40.27. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $7^x - 3 \cdot 2^y = 1$.

40.28. Doti 7 vektori. Katru 3 vektoru summas garums vienāds ar 4 pārējo vektoru summas garumu. Pierādīt, ka visu vektoru summa ir nulles vektors.

40.29. Dots, ka $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Pierādīt, ka $x + y + z \le xyz + 2$.

40.30. Telpā atzīmēti *n* punkti, $n \ge 4$. Nekādi 4 no tiem neatrodas vienā plaknē. Daži no tiem savienoti ar taisnes nogriežņiem. Zināms, ka ir spēkā šāda īpašība: lai kādus 4 atzīmētos punktus mēs izvēlētos, starp tiem var atrast 3 punktus, kas visi savā starpā savienoti ar nogriežņiem. Kāds var būt mazākais kopējais nogriežņu skaits?

12. klase

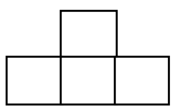
40.31. Funkcija $f(x)$ definēta pozitīviem *x*, un tās vērtības ir pozitīvi skaitļi. Zināms, ka, ja *a*, *b* un *c* ir trijstūra malu garumi, tad $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ arī ir kaut kāda trijstūra malu garumi. Pierādīt, ka eksistē tādi pozitīvi skaitļi *A* un *B*, ka katram *x* pastāv nevienādība

$$f(x) \le Ax + B$$

40.32. Plaknē doti *n* punkti, $n \ge 3$. Atrodam visus attālumus starp diviem no tiem. Pierādīt, ka mazākā iegūtā vērtība nav sastopama vairāk nekā $3n - 6$ reizes.

40.33. Vai eksistē tāda punktu kopa telpā, ka katra plakne satur tikai galīgu skaitu punktu (vismaz vienu) no šīs kopas?

40.34. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ rūtiņām un izkrāsots šaha galdiņa kārtībā. Ar vienu gājienu atļauts mainīt krāsu uz pretējo jebkurās 4 rūtiņās, kuras var pārklāt ar 40.3. zīmējumā attēloto figūru. Vai, daudzkārt atkārtojot šādus gājienus, var iegūt sākotnējam krāsojumam pretēju krāsojumu ($n \ge 10$)?



40.3. zīm.

40.35. *A* ir bezgalīga naturālu skaitļu kopa. Katrs *A* elements ir ne vairāk kā 1990 dažādu pirmskaitļu reizinājums. Pierādīt, ka eksistē tāds skaitlis *p* un tāda kopas *A* bezgalīga apakškopa B, ka katru divu dažādu B elementu lielākais kopīgais dalītājs ir p.