Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 41. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

9. klase

41.1. Naturālu skaitli pareizināja ar tā ciparu summu. Vai rezultāts var būt $1000\ldots0010000\ldots01$?

41.2. Kvadrātiska tabula sastāv no 10×10 rūtiņām. Tās rūtiņās ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 100 (katrā rūtiņā – cits skaitlis). Zināms, ka katrā rindā no kreisās uz labo pusi ierakstītie skaitļi veido augošu aritmētisku progresiju, un katrā kolonnā no apakšas uz augšu ierakstītie skaitļi arī veido augošu aritmētisku progresiju. Atrast visas tabulas ar šādām īpašībām un pierādīt, ka citu nav.

41.3. Kvadrātvienādojuma $x^2+px+q=0$ saknes ir x_1 un x_2. Zināms, ka $\frac{1}{1+x_1}$ un $\frac{1}{1+x_2}$ arī ir šī kvadrātvienādojuma saknes. Atrast *p* un *q*.

41.4. Trijstūra *ABC* laukums ir S_0. Punkti *M* un *N* ir atbilstoši malu *BC* un *AC* iekšējie punkti; taisnes nogriežņi *AM* un *BN* krustojas punktā *O*. Zināms, ka trijstūru *AOB*, *MON* un *CMN* laukumi ir atbilstoši S_1, S_2 un S_3. Pierādīt, ka $S_0 \cdot S_2 = S_1 \cdot S_3$.

41.5. Uz šaha galdiņa ar izmēriem 8×8 rūtiņas 15 rūtiņās novietots pa figūriņai. Katrā rindā un katrā kolonnā atrodas vismaz viena figūriņa. Pierādīt, ka vienu no figūriņām var noņemt no galdiņa tā, ka joprojām katrā rindiņā un katrā kolonnā atrodas vismaz viena figūriņa.
Vai uzdevuma apgalvojums paliek spēkā, ja sākumā izvietotas tikai 14 figūriņas?

10.klase

41.6. Kuram no vienādojumiem $\cos x=\cos 3x$ un $\cos x=\cos 5x$ intervālā $[0,\,2\pi)$ ir vairāk atrisinājumu?

41.7. Skaitlis n satur vismaz 3 ciparus, beidzas ar ciparu 5 un ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts. Pierādīt, ka skaitļa n trešais cipars no beigām ir pāra cipars.

41.8. Dots pusriņķis ar centru O un diametru AB. Uz rādiusa OA izvēlēts punkts S, kas atšķiras gan no O, gan no A. No S vienādos leņķos pret diametru AB novilkti stari, kas krusto pusriņķa līniju punktos K un L. Punktā K pret staru SK novilkts perpendikuls, kas otrreiz krusto pusriņķa līniju punktā N. Zināms, ka N nesakrīt ar L. Pierādīt, ka $NL \parallel AB$.

41.9. Pierādīt, ka no jebkura vienādsānu trijstūra ar laukumu S var izgriezt trīs vienādus trijstūrus, katram no kuriem laukums pārsniedz $\frac{S}{4}$. Šķirojiet divus gadījumus:

a) dotā trijstūra virsotnes leņķis lielāks par $60°$,

b) dotā trijstūra virsotnes leņķis nav lielāks par $60°$.

41.10. Doti n^2+n "stūrīši"; katrs no tiem izveidots no diviem metāliskiem stienīšiem ar garumu 1, salodējot tos ar galiem kopā taisnā leņķī. No šiem stūrīšiem salikts kvadrātisks režģis, kas sastāv no n^2 rūtiņām. Pierādīt, ka tādu stūrīšu skaits, kuru malas vērstas no stūrīša virsotnes uz augšu un pa labi, ir tikpat, cik tādu stūrīšu skaits, kuru malas vērstas no stūrīša virsotnes uz leju un pa kreisi.

11.klase

41.11. Dots polinoms $P(x)$; polinoms $F(x)$ ir $P(x)$ atvasinājums. Vai var gadīties tā, ka $P(x)F(x)=x^{100}+19x^3+91$?

41.12. Dots, ka $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=3$. Aprēķināt $\sin x+\sin 2x+\sin 3x$.

41.13. Katrā no kuba virsotnēm sēdēja pa mušai. Tās visas reizē pacēlās gaisā un no jauna nosēdās pa vienai katrā virsotnē (varbūt citā kārtībā nekā no sākuma). Pierādīt, ka var atrast tādas trīs mušas, kas pirms lidojuma un pēc tā atradās divu vienādu trijstūru virsotnēs.

41.14. Vienādmalu trijstūra ABC iekšpusē ņemts punkts O. No O pret malām AB, BC, CA novilkti perpendikuli; perpendikulu pamati ir atbilstoši M, N un K. Pierādīt, ka

$$\frac{AO}{MK}=\frac{BO}{MN}=\frac{CO}{NK}.$$

41.15. Simts karavīri nostādīti 10 rindās un 10 kolonnās. Katrā rindā karavīru augumi neatšķiras vairāk kā par 10 cm. Pulkvedis lika karavīriem katrā kolonnā pārkārtoties pēc auguma: priekšā – visīsākais, … , aizmugurē – visgarākais. Pierādīt, ka arī pēc pārkārtošanās nevienā rindā karavīru augumi neatšķiras vairāk nekā par 10 cm.

12.klase

41.16. Zināms, ka starp skaitļiem $\sin x, \cos x, \sin y, \cos y$ ir tikai divi dažādi. Pierādīt, ka $\cos 4x = \cos 4y$.

41.17. Trijstūra malu garumi ir *a*, *b* un *c*, mediānu garumi m_1, m_2, m_3; apvilktā riņķa rādiuss ir *R*. Pierādīt, ka

$$ab + ac + bc \le 2R(m_1 + m_2 + m_3).$$

41.18. Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + y^3 + z^5 = 3 \\ x^5 + y + z^3 = 3 \\ x^3 + y^5 + z = 3. \end{cases}$$

41.19. Pilsētai ir daudzstūra forma. Tā ar ielām sadalīta kvartālos – daudzstūros. Visās daudzstūra virsotnēs atrodas laukumi; citu laukumu nav. Katra iela savieno divus laukumus un neiet caur citiem. Katrā ielā ieviesta vienvirziena satiksme. Pie tam izpildās divi nosacījumi:

a) katrā laukumā var gan iebraukt, gan izbraukt no tā,
b) pilsētai var apbraukt apkārt pa tās kontūru.

Pierādīt, ka pilsētā ir tāds kvartāls, kuram var apbraukt pa ielām, kas to ierobežo.

41.20. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$n!+1 = (m!-1)^2.$$

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

9., 10. klases

41.21. Doti 33 dažādi naturāli skaitļi; neviens no tiem nepārsniedz 100. Pierādīt, ka starp tiem var izvēlēties divus tādus, kuru starpība ir 8, 9 vai 17.

41.22. Dots, ka *a*, *b* un *c* ir pozitīvi skaitļi un $a+b+c=1$. Pierādīt, ka

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

41.23. Augoša aritmētiskā progresija sastāv no 12 naturāliem skaitļiem. Tās diference nepārsniedz 1991. Pierādīt, ka visi progresijas locekļi nevar vienlaicīgi būt pirmskaitļi.

41.24. Uz riņķa līnijas fiksēti punkti *A*, *B*, *C*, *D* (šādā secībā). Uz riņķa līnijas loka *BC*, kas nesatur punktus *A* un *D*, izvēlamies patvaļīgu punktu *P*, kas nesakrīt ne ar *B*, ne ar *C*. Apzīmēsim *BC* krustpunktus ar *AP* un *DP* attiecīgi ar *M* un *N*. Pierādīt, ka $\frac{BM \cdot NC}{MN}$ vērtība nav atkarīga no tā, kurš punkts *P* izvēlēts.

41.25. Kongresa delegātiem jāievēl komisija. Katram delegātam ir 10 viņam tuvas kandidatūras. Komisija apmierina delegātu, ja tajā ir kaut viens viņam tuvs kandidāts. Izrādījās, ka katrus 6 delegātus var vienlaicīgi apmierināt, ievēlot kādu no 2 cilvēkiem sastāvošu komisiju. Pierādīt, ka var ievēlēt 10 cilvēku komisiju, kas vienlaicīgi apmierina visus delegātus.

11.klase

41.26. Visi skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lielāki par 1. Zināms, ka

$$|a_2 - a_1| < 1, |a_3 - a_2| < 1, \ldots, |a_n - a_{n-1}| < 1.$$

Pierādīt, ka

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} < 2n - 1.$$

41.27. Telpā doti 7 punkti; nekādi 4 no tiem neatrodas vienā plaknē. Katrs taisnes nogrieznis, kas savieno divus no šiem punktiem, nokrāsots baltā vai melnā krāsā. Pierādīt, ka var atrast divus trijstūrus, kam nav kopīgas malas un katram no kuriem visas 3 malas ir vienādi nokrāsotas (varbūt vienam trijstūrim baltas, bet otram – melnas).

41.28. Dots polinoms $2x^3-60x^2+ax$, a – vesels skaitlis. Zināms, ka, ievietojot x vietā kaut kādus trīs viens otram sekojošus naturālus skaitļus, polinoma vērtība ir trīs viens otram sekojoši naturāli skaitļi. Atrast šīs polinoma vērtības.

41.29. Uz trijstūra *ABC* malām *AB*, *BC*, *CA* ņemti atbilstoši punkti *N*, *M* un *K*, kas nav virsotnes. Zināms, ka taisnes *AM*, *BK*, *CN* krustojas vienā punktā. Leņķa *A* bisektrise krusto malu *BC* punktā *L*. Zināms, ka punkti *A*, *N*, *L*, *M*, *K* atrodas uz vienas riņķa līnijas. Pierādīt, ka *AM* ir trijstūra *ABC* augstums.

41.30. Funkcija $f(x)$ definēta visām naturālām argumenta vērtībām; tās vērtības ir naturāli skaitļi. Vai var būt, ka visiem naturāliem *x* pastāv vienādība

$$f(f(x))=x+1991?$$

12.klase

41.31. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 5x\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=12 \\ 5y\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=4. \end{cases}$$

41.32. No n^3 vienādiem kubiņiem salikts kubs. Atzīmēti vairāk nekā $\frac{3}{2}n^2$ mazie kubiņi. Pierādīt, ka var atrast taisnleņķa trijstūri, kura virsotnes atrodas atzīmēto kubiņu centros un katetes paralēlas kuba šķautnēm.

41.33. Trijstūrī *ABC* mazākais leņķis ir $\angle BAC=30°$. Uz malām *AB* un *AC* atlikti attiecīgi punkti *M* un *N* tā, ka $BM=CN=BC$. Pierādīt, ka nogrieznis *MN* perpendikulārs nogrieznim, kas savieno ievilktā un apvilktā riņķu centrus, un vienāds ar to.

41.34. No koordinātu plaknes punkta $(x,\, y)$ ar vienu gājienu drīkst pāriet uz jebkuru no punktiem $(x,\, y+2x)$, $(x,\, y-2x)$, $(x-2y,\, y)$, $(x+2y,\, y)$. Ja ar kādu gājienu pāriets no *A* uz *B*, tad ar tieši sekojošo gājienu nedrīkst iet uzreiz atpakaļ uz *A*.
Pierādīt, ka, izejot no punkta $(2,\, \sqrt{2})$, un ar pirmo gājienu nepārejot uz punktu $(2-2\sqrt{2},\, \sqrt{2})$, izejas punktā vairs nav iespējams atgriezties.

41.35. Dots, ka $n_1, n_2, \ldots, n_k$ -- naturāli skaitļi, pie tam
$2^{n_1}-1$ dalās ar n_2, $2^{n_2}-1$ dalās ar n_3, … ,

$2^{n_{k-1}}-1$ dalās ar n_k, $2^{n_k}-1$ dalās ar n_1.

Pierādīt, ka $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$.