Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

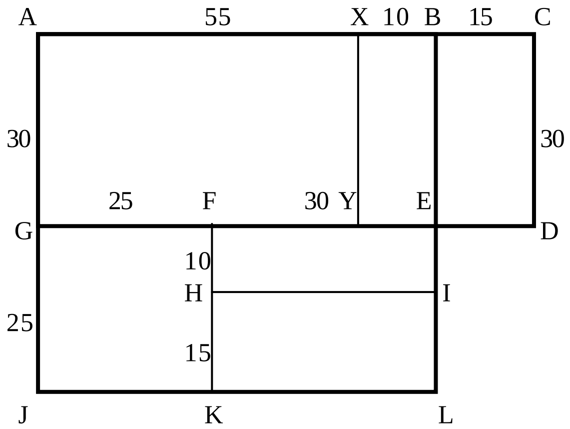
LATVIJAS REPUBLIKAS 42. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

42.1. Apzīmējam $x^2+x=y$; iegūstam vienādojumu $y=\frac{2}{y+1}$, no kurienes seko $y_1=-2$ un $y_2=1$. Risinot vienādojumu $x^2+x=-2$, atrisinājumu nav; risinot vienādojumu $x^2+x=1$, iegūstam atrisinājumus $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

42.2. Pieņemsim, ka 1. martā šokolādes cena bija 1, un cenas tika paaugstinātas n dienas. Ja kādā veikalā cena x dienas paaugstinājās 2 reizes, bet $n-x$ dienas – 3 reizes, tad šokolādes cena šajā veikalā pašreiz ir $2^x\cdot 3^{n-x}=\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot 3^n$. Reizinātājs 3^n visiem 10 veikaliem ir kopīgs, tātad reizinātājiem $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ jāatšķiras. Tātad jāatšķiras atbilstošajiem kāpinātājiem x, kas ir veseli nenegatīvi skaitļi. Tā kā to pavisam ir 10, tad lielākais kāpinātājs pārsniedz mazāko vismaz par 9. Atbilstošo cenu attiecība ir vismaz $\left(\frac{3}{2}\right)^9=\left(\frac{27}{8}\right)^3>3^3=27$.

42.3. Apskatām 42.1. zīmējumu.



42.1. zīm.

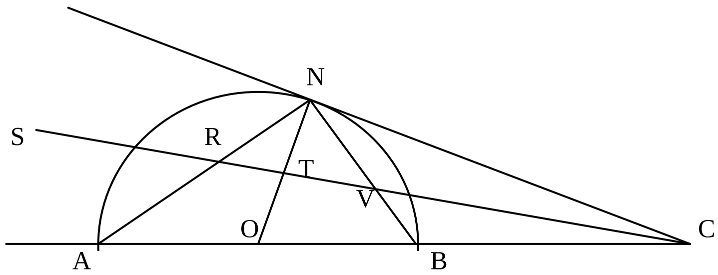
Sākotnējā kastīte ir *ACDG*, jaunā – *ABLJ*. Monētas tiek pārvietotas uz jauno kastīti sekojoši:

a) Tās monētas, kas vecajā kastītē neiziet ārpus *ABEG*, atstājam uz vietas.

b) Pārējās monētas atrodas taisnstūrī *XCDY*, jo to diametrs nepārsniedz 10 cm. Tās pārvietojam uz tāda paša izmēra taisnstūra *ELKF*.

c) Jauno monētu ievietojam kvadrātā *GFKJ*.

42.4. Aplūkojam 42.2. zīmējumu.



42.2. zīm.

Tā kā *AB* ir pusriņķa diametrs, tad $\angle ANB = 90°$. Apzīmējam $\angle NCS = \angle SCA = \alpha$; tad $\angle NOC = 90° - 2\alpha$, $\angle AON = 90° + 2\alpha$ un, tā kā *AON* ir vienādsānu trijstūris, tad $\angle ANO = 45°$. Savukārt $\angle NTC = 90° - \alpha$ un $\angle STN = 90° + \alpha$. Tāpēc no ΔRTN iegūstam $\angle NRT = 180° - \angle STN - \angle ANO = 180° - (90° + \alpha) - (45° - \alpha) = 45°$.

Tātad taisnleņķa trijstūrī *RNV* viens no šaurajiem leņķiem ir $45°$; tātad tas ir vienādsānu trijstūris.

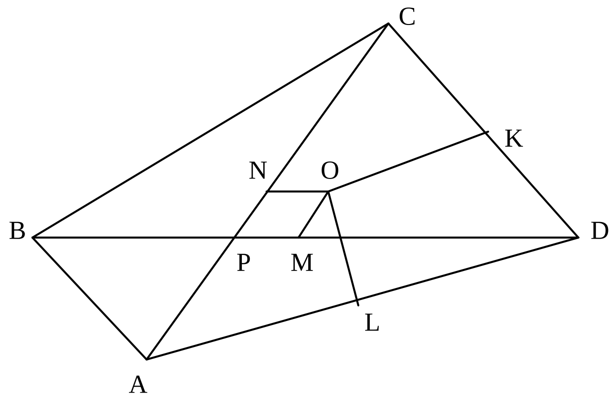
42.5. Masu summa ir $1 + 2 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$. Acīmredzot nepieciešamais nosacījums ir, lai šī summa būtu pāra skaitlis. $\frac{n(n+1)}{2}$ ir pāra skaitlis, ja $n = 4t$ vai $n = 4t + 3$.

Pierādīsim, ka minētais nosacījums ir arī pietiekamais.

To viegli pierādīt ar matemātisko indukciju, parādot bāzes piemērus, ja $t = 0$ un pievienojot pa 4 akmeņiem: k un $(k+3)$ pievienojot vienai kaudzei, bet $(k+1)$ un $(k+2)$ -- otrai kaudzei.

42.6. Apzīmējam skaitļus ar a, $a + d$, $a + 2d$. No vienādības $a^2 + (a + 2d)^2 = 2(a + d)^2$ viegli seko, ka $d = 0$.

42.7. Apzīmēsim figūras F laukumu ar $[F]$.



42.3. zīm.

Tā kā trijstūri KLD un CAD ir homotētiski ar centru D un koeficientu 2, tad $[KLD] = \frac{1}{4}[CAD]$.

Tā kā $OM \parallel CA$ un $KL \parallel CA$, tad $OM \parallel KL$. No šejienes $[KLO] = [KLM]$.

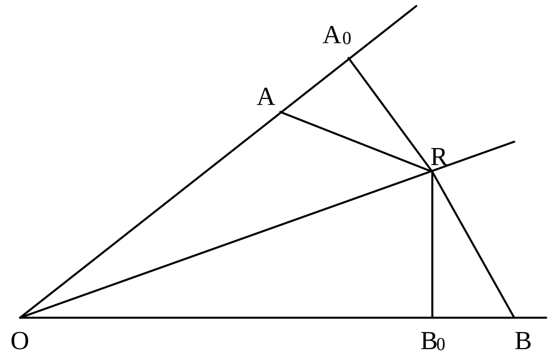
Trijstūri KLM un CAB ir homotētiski (centrs D, koeficients 2). Tātad $[KLO] = [KLM] = \frac{1}{4}[CAB]$.

No šejienes $[OKDL] = [KLD] + [KLO] = \frac{1}{4}([CAD] + [CAB]) = \frac{1}{4}[ABCD]$.

Apgalvojumus par citām četrstūra daļām pierāda līdzīgi.

42.8. Uzrakstām šo virkni pēc moduļa 11: 1, 4, 2, 7, 0, 1, … . Šī virkne ir periodiska ar perioda garumu 5. Redzam, ka $a_{1000} = a_{5n}$ dalās ar 11.

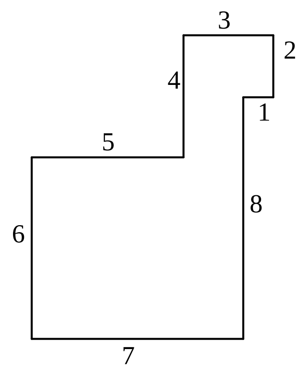
42.9. Atliekam uz leņķa malām $OA_0 = OB_0 = \frac{1}{2}$. Novelkam punktos A_0 un B_0 perpendikulus pret leņķa malām, uz kurām tie atrodas; to krustpunkts R atrodas uz leņķa A_0OB_0 bisektrises (skat. 42.4. zīm.).



42.4. zīm.

No vienādībām $OA + OB = 1 + OA_0 + OB_0$ seko, ka $AA_0 = BB_0$. Tātad trijstūri ARA_0 un BRB_0 ir vienādi. No šejienes seko, ka $\angle OAR + \angle OBR = 180°$. Tātad ap četrstūri $OARB$ var apvilkt riņķa līniju. Tas nozīmē, ka visas aplūkojamās riņķa līnijas iet caur fiksētu punktu R.

42.10. a) Jā, skat. 42.5. zīmējumu.



42.5. zīm.

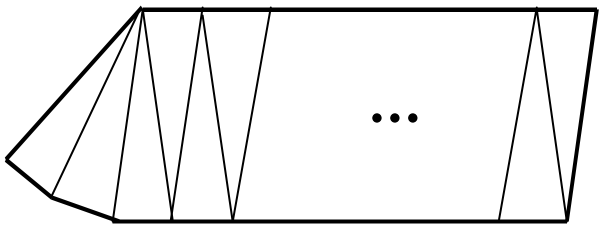
b) Nē. Tā kā horizontālie un vertikālie posmi novietojas pamīšus, tad to skaitiem jābūt vienādiem, tātad posmu skaitam jābūt pāra skaitlim.

c) Nē. Kopīgajai ceļu summai ir jābūt pāra skaitlim, bet 1+2+ … + 14 nav pāra skaitlis.

d) Nē. Paralēlo posmu algebriskā summa ir 0. Tātad jābūt $\pm 2 \pm 4 \pm 6 \pm 8 \pm 10 \pm 12 = 0$; saīsinot ar 2, iegūstam $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6 = 0$, taču vienādības kreisā puse ir nepāra skaitlis, t.i., nav 0.

42.11. Skaidrs, ka jāpārbauda tikai punkts 1. Funkcijas x^2 atvasinājums punktā 1 ir 2; funkcijas $x^3 - x + 1$ atvasinājums punktā 1 arī ir 2. Ievērojot arī , ka funkcija ir nepārtraukta, secinām, ka tai eksistē atvasinājums visos skaitļu ass punktos.

42.12. Tāds ir, piemēram, 42.6. zīmējumā parādītais sešstūris.

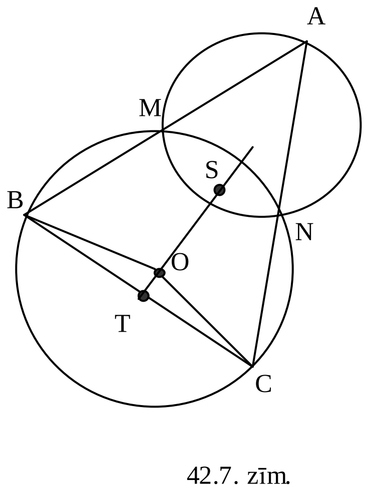


42.6. zīm.

42.13. Caur pirmo taisni novelkam plakni α, kas krusto otro un trešo taisni punktos *A* un *B.* Skaidrs, ka taisne *AB* krusto visas šķērsās taisnes.

42.14. Pierādīsim, ka mazākā iespējamā $f(2)$ vērtība ir 4. Tā kā funkcija $f = x^2$ apmierina uzdevuma nosacījumus, tad vērtība 4 realizējas. Pieņemsim, ka $f(2)$ vērtība var būt mazāka par 4; tā kā dots, ka tā ir lielāka par 2, tad $f(2) = 3$.
Apzīmēsim $f(3) = a$. Tad $a^2 = f(3)^2 = f\left(3^2\right) = f(9) > f(8) = f\left(2^3\right) = f(2)^3 = 27$; tātad $a \geq 6$. Līdzīgi $a^5 = f\left(3^5\right) = f(243) < f(256) = f\left(2^8\right) = 3^8$. Tātad jābūt $6^5 < 3^8$, jeb, saīsinot ar 3^5, $2^5 < 3^3$, bet šī nevienādība ir nepareiza. Tātad $f(2)$ nevar pieņemt mazāku vērtību par 4.

42.15. Skat. 42.7. zīm.



42.7. zīm.

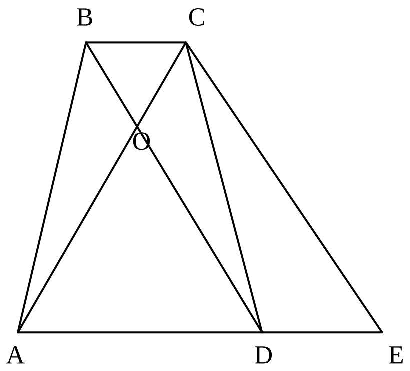
Ievērosim, ka leņķis *BAC* ir fiksēts lielums α, jo "mazajā" riņķa līnijā balstās uz fiksētu loku. Tā kā $\alpha = \frac{1}{2}\left(\cup BC - \cup MN\right)$ (loki aplūkoti "lielajā" riņķa līnijā), tad loka *BC* garums ir fiksēts; tātad arī horda *BC* ir fiksēta garuma. Apzīmēsim "lielās" riņķa līnijas centru ar *O*, *BC* vidusperpendikulu – ar *T*, ap trijstūri *ABC* apvilktās riņķa līnijas centru ar *S*. Tā kā *BC* ir fiksēta garuma, tad *OT* garums arī ir fiksēts. Tā kā $\angle BSC = 2\alpha$, tad arī *TS* garums ir fiksēts. Tātad arī *OS* ir fiksēta garuma, un *S* atrodas uz riņķa līnijas ar centru punktā *O*.

42.16. Apzīmējot $\operatorname{tg} x = y$, iegūstam vienādojumu

$$y^2 - y + 1 = 0 .$$

Šim vienādojumam nav atrisinājumu, tātad arī sākotnējam vienādojumam nav atrisinājumu.

42.17. Novelkam $CE \parallel BD$ (skat. 42.8. zīm.).



42.8. zīm.

Tad *BCED* – paralelograms, tāpēc $DE = BC$ un $AE = AD + DE = AD + BC = AC$. Tāpēc *CAE* ir vienādsānu trijstūris, kura leņķis *C* ir 60° vai 120°; tātad $\angle C = 60°$ un trijstūris *CAE* ir regulārs. No šejienes seko, ka arī trijstūris *AOD* ir regulārs. No šejienes viegli seko prasītais.

42.18. Pārrakstīsim vienādojumu šādi: $(n+1)^k = n! + 1$. Aplūkosim kādu no $(n+1)$ dalītājiem *p*. Tad $p \le n+1$; tā kā $n!+1$ nevar dalīties ar skaitļiem, kas mazāki par $n+1$, tad $n+1 = p$ ir pirmskaitlis. Ja $n+1 = 2$, tad $n = 1$ un $k = 1$; ja $n+1 = 3$, tad $n = 2$ un $k = 1$; ja $n+1 = 5$, tad $n = 4$ un $k = 2$.

Ja $p > 5$, tad, izmantojot Ņūtona binoma formulu, iegūstam

$$n! = (n+1)^k - 1 = n^k + kn^{k-1} + \cdots + kn .$$

Tā kā $n!$ dalās ar n^2, jo $n! = (2m)! = 2m \cdot \cdots \cdot m \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$, tad k dalās ar n. Tas nozīmē, ka $k \geq n$. Tādā gadījumā $n! = (n+1)^k - 1 \geq (n+1)^n - 1 > n^n$, bet tā nevar būt. Tātad vienīgie atrisinājumi ir tie, kas norādīti sākumā.

42.19. Apgalvojumu pierāda, izmantojot smaguma centra jēdzienu. Katrā virsotnē jāievieto tāda masa, lai sfēras pieskaršanās punkts būtu atbilstošo virsotņu masas centrs. Tad visi dotie nogriežņi krustosies visas sistēmas masas centrā.

42.20. Pieņemam pretējo, ka tādu 5 cilvēku nav.

Tad vispirms pierāda divus apgalvojumus:

1) Katrs cilvēks runā tieši 3 valodās.

2) Nevienā valodā nerunā mazāk par 3 cilvēkiem.

Tātad ir valodas kurās runā 3 vai 4 cilvēki. Aplūkojot dažādus variantus, iegūstam pretrunu.

42.21. Vispirms pierādīsim apgalvojumu: ja $n = 3t + 2$, tad skaitļa n visu dalītāju summa dalās ar 3.

Tā kā n nav naturāla skaitļa kvadrāts, tad visi tā dalītāji sadalās pāros $\left(d, \frac{n}{d}\right)$, kuru summa dalās ar 3; tiešām, ja $d \equiv 1 \pmod 3$, tad $\frac{n}{d} \equiv \frac{2}{1} \equiv 2 \pmod 3$ un otrādi, ja $d \equiv 2 \pmod 3$, tad $\frac{n}{d} \equiv \frac{2}{2} \equiv 1 \pmod 3$. Apgalvojums pierādīts.

Līdzīgi pierāda, ka skaitļa $n = 8t + 7$ visu dalītāju summa dalās ar 8.

Tā kā $n + 1$ dalās ar 24, tad $n = 3t + 2$ un $n = 8k + 7$; tātad n dalītāju summa dalās ar 3 un 8, t.i., arī ar 24.

42.22. Jā var. Apskatīsim šādu taišņu sistēmu:

1) 5 savstarpēji paralēlas taisnes,
2) 5 savstarpēji paralēlas taisnes, kas nav paralēlas iepriekšējām,
3) 6 savstarpēji paralēlas taisnes, kas nav paralēlas iepriekšējām,
4) 1 taisne, kas nav paralēla iepriekšējām.

Skaidrs, ka krustojas jebkuras divas taisnes no dažādām grupām. Tātad krustpunktu skaits ir $5 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 101$.

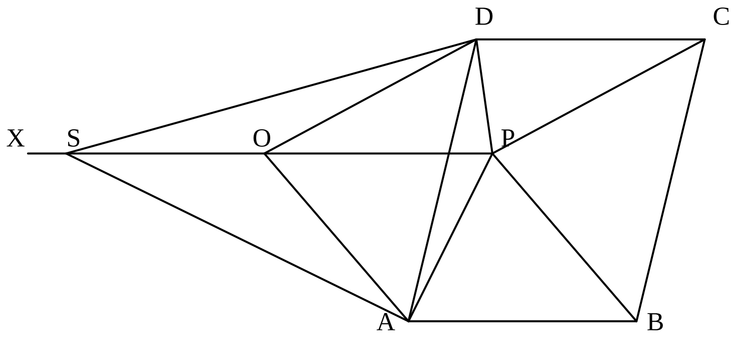
42.23. Ievērosim, ka $(x - y)(x^2 - y^2) \geq 0$ (abu reizinātāju zīmes ir vienādas). Tāpēc

$$x^3 + y^3 \geq x^3 + y^3 - \frac{(x-y)(x^2 - y^2)}{2} = \frac{(x+y)(x^2 + y^2)}{2} = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} =$$

$$\sqrt{xy} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{xy} \cdot \sqrt{2xy} = \sqrt{2} \cdot xy.$$

Prasītais pierādīts.

42.24. Apzīmējam $\angle ADP = \alpha$ un $\angle DAP = \beta$. Novelkam $PK \parallel AB$, atliekam $PO = AB = CD$ (skat. 42.9. zīm.).



42.9. zīm.

Tad *ABPO* un *CDOP* ir paralelogrami, tātad $\angle AOP = 2\alpha$ un $\angle DOP = 2\beta$. Atliekam $OS = OA$. Tad no ārējā leņķa īpašības $\angle OSA = \angle OAS = \frac{1}{2}\angle AOP = \alpha$, tātad $\angle ASP = \angle ADP$ un ap *ASDP* var apvilkt riņķa līniju.

Tāpēc $\angle PSD = \angle PAD = \beta$ un $\angle ODS = \angle DOP - \angle DSP = 2\beta - \beta = \beta$. Tātad $\angle DSO = \angle SDO$ un $OS = OD$. Tātad ap *ASDP* apvilktā riņķa centrs ir *O*. No šejienes seko prasītās vienādības.

42.25. a) Nē, nevar. Sauksim par pļāpai *A* vissvešāko pļāpu to pļāpu *B*, ar kuru pļāpa *A* runā kā ar pēdējo, un apzīmēsim *B* = *S* (*A*).

Lemma. Ja *B* = *S* (*A*), tad *A* = *S* (*B*).

Tiešām, ja pļāpa *B* pēc sarunas ar *A* runātu vēl ar kādu pļāpu *C*, tad viņa šīs sarunas laikā uzzinātu *C* jaunumu, ko saskaņā ar nosacījumu viņa vēl nezināja, runājot ar *A*, un arī neuzzināja, runājot ar *A*. Bet tā kā *A* pēc sarunas ar *B* vispār vairs nerunāja, tad *A* neuzzināja *C* jaunumu. Iegūtā pretruna pierāda lemmu.

No lemmas seko: pļāpas sadalās "savstarpēji vissvešāko" pļāpu pāros, tātad to skaits nevar būt nepāra skaitlis.

b) Jā, var. Vispirms sadala pļāpas grupās pa 4 un katras grupas ietvaros panāk pilnīgu informētību.

Piemēram, tā:

1. stundā A_1 ar A_2, A_3 ar A_4

2. stundā A_1 ar A_3, A_4 ar A_2.

Tagad apzīmēsim pļāpas no 3 grupām ar A_i, B_i, C_i, i = 1, 2, 3, 4, un izveidojam trīs jaunus “kolektīvus”; katrā no tiem ietilpst 2 pļāpas no vienas grupas un pa vienai no parējām grupām:

K_1 : A_1, A_2, B_1, C_1;

K_2 : A_3, B_2, B_3, C_2;

K_3 : A_4, B_4, C_3, C_4.

“Kolektīva” K_1 ietvaros pilnīgu informētību var panākt, piemēram, šādi:

1. stundā B_1 ar C_1

2. stundā A_1 ar B_1 un A_2 ar C_1.

Līdzīgi rīkojas pārējos “kolektīvos”.

42.26. Vispirms atzīmēsim, ka maksimālā summa eksistē, jo dažādu sadalījumu skaits ir galīgs. Aplūkojam maksimālo sadalījumu un pierādām, ka

a) tajā nav skaitļu $n \geq 5$; jo n var aizstāt ar skaitļiem 2 un $n-2$, kuru reizinājums lielāks par n;

b) tajā nav skaitļa 1, jo vieninieku var pievienot jebkuram reizinātājam, un reizinājums palielināsies;

c) var iztikt bez skaitļa 4, aizvietojot to ar 2 un 2;

d) sadalījumā nav vairāk par diviem skaitļiem 2, jo trīs divniekus var aizvietot ar diviem trijniekiem; reizinājums palielināsies, jo $2\times2\times2 < 3\times3$.

Tātad maksimālajā sadalījumā ir tikai skaitļi 3 un 2, turklāt divnieku ir ne vairāk par diviem. Tā kā $1992 = 3\cdot 664$, tad maksimālais sadalījums sastāv no 664 trijniekiem.

42.27. Skaidrs, ka *n* nevar būt pāra skaitlis, tad vienādojuma kreisā puse ir pozitīva.

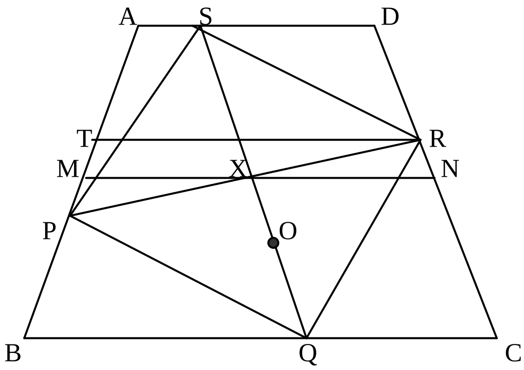
Ja $n=1$, tad $x=-4$.

Pieņemsim, ka $n \geq 3$ ir nepāra skaitlis. Izvirzot pēc Ņūtona binoma formulas, kreisajā pusē iegūstam polinomu ar vecāko locekli x^n un brīvo locekli 2^{n+1}. Tāda vienādojuma veselās saknes var būt tikai skaitļi $x = \pm 2^t$, t – vesels nenegatīvs skaitlis. Pārbaude parāda, ka neder $t=0$ un $t=1$. Ja $t \geq 2$, tad, apzīmējot $t = p+1$, iegūstam

$$2^n\left(-2^{np} + \left(1+2^p\right)^n + \left(1-2^p\right)^n\right) = 0\,.$$

Taču izteiksme iekavās pēc moduļa 4 nav vienāda ar 0.

42.28. Trapecē *ABCD* ievilkts rombs *PQRS*; *O* ir ap trapeci apvilktās riņķa līnijas centrs (skat. 42.10. zīm.).



42.10. zīm.

Apzīmējam ar *M* un *N* malu *AB* un *CD* viduspunktus. Skaidrs, ka *MN* iet caur *QS* viduspunktu (tas ir romba diagonāļu krustpunkts *X*). Novelkam $RT \parallel MN$. Tā kā $PX = XR$, tad $PM = MT$ (Talesa teorēma). Tā kā $MT = RN$, tad $PM = RN$. Tā kā trapece ir vienādsānu, tad $OM = ON$; izmantojot vienādību $\angle OMP = \angle ONR = 90°$ iegūstam, ka trijstūri *OMP* un *ONR* ir vienādi. Tātad *OP*=*OR*, un *O* atrodas uz *PR* vidusperpendikula – taisnes *SQ*; ko arī vajadzēja pierādīt.

42.29. Jā, var. Pierāda, ka sadalījumu skaits, kas satur kādu 10-locekļu aritmētisku progresiju ir mazāks par visu sadalījumu skaitu.

42.30. a) Nē, nevar. Sauksim par pļāpai *A* vissvešāko pļāpu to pļāpu *B*, ar kuru pļāpa *A* runā kā ar pēdējo, un apzīmēsim *B* = *S* (*A*).

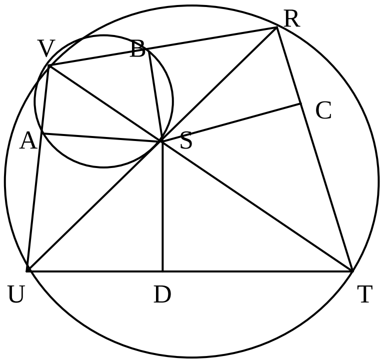
Lemma. Ja *B* = *S* (*A*), tad *A* = *S* (*B*).

Tiešām, ja pļāpa *B* pēc sarunas ar *A* runātu vēl ar kādu pļāpu *C*, tad viņa šīs sarunas laikā uzzinātu *C* jaunumu, ko saskaņā ar nosacījumu viņa vēl nezināja, runājot ar *A*, un arī neuzzināja, runājot ar *A*. Bet tā kā *A* pēc sarunas ar *B* vispār vairs nerunāja, tad *A* neuzzināja *C* jaunumu. Iegūtā pretruna pierāda lemmu.

No lemmas seko: pļāpas sadalās “savstarpēji vissvešāko” pļāpu pāros, tātad to skaits nevar būt nepāra skaitlis.

b)Nē, nevar. Pierādījums izmanto lemmu un analogu apgalvojumu par pirmo sarunu biedreni.

42.31. Skat. 42.11. zīmējumu.



42.11. zīm.

Apzīmējam riņķa diametru ar d. Acīmredzot ap $AVBS$ var apvilkt riņķa līniju ar diametru VS. Tā kā $\angle V = \angle UVR$ ir ievilkts divās riņķa līnijās, tad iegūstam vienādību $\frac{AB}{VS} = \sin V = \frac{UR}{d}$. Līdzīgi

$$AB + CD = \frac{VS \cdot UR}{d} + \frac{ST \cdot UR}{d} = \frac{UR}{d}(VS + ST) = \frac{UR \cdot VT}{d}.$$

Līdzīgi pierāda, ka $AD + BC = \frac{UR \cdot VT}{d}$. Tātad $AB + CD = AD + BC$, un četrstūrī $ABCD$ var ievilkt riņķa līniju.

42.32. Ja $a = 1$, der jebkurš x un $y = 1$.

Ja $a \geq 2$, var ņemt $x = a + 1,\ y = a^2 + a - 1$ un $x = a - 1,\ y = a^2 - a - 1$.

42.33. Nē, nevar. Pretruna rodas no tā, ka 7-stūra vidējais leņķa lielums ir $180° - \frac{360°}{7} < 120°$, bet katrā kopīgajā virsotnē savienojas vismaz 3 leņķi, tātad to vidējais lielums nepārsniedz $\frac{360°}{3} = 120°$.

42.34. Pierādīsim vispārīgākus apgalvojumus:

(a) ja $n \geq 3,\ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ un $x_1 x_2 \cdots x_n \geq 1$, tad

$$S_n = \frac{1}{1 + x_1} + \cdots \frac{1}{1 + x_n} < n - 1;$$

(b) ja $n \geq 3,\ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ un $x_1 x_2 \cdots x_n \leq 1$, tad

$$S_n = \frac{1}{1 + x_1} + \cdots \frac{1}{1 + x_n} > 1.$$

Bāzi pie $n = 3$ pārbauda tieši.

Induktīvā pāreja (a) gadījumā:

Varam pieņemt, ka $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq x_{n+1}$.

Tad no $x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} \geq 1$ seko, ka $x_1 x_2 \cdots x_n \geq 1$. Tāpēc

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{1+x_{n+1}} < (n-1)+1 = (n+1)-1.$$

Induktīvā pāreja (b) gadījumā:

Varam pieņemt, ka $x_{n+1} \geq x_n \geq \cdots \geq x_2 \geq x_1$.

Tad no $x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} \leq 1$ seko $x_1 x_2 \cdots x_n \leq 1$.

Tāpēc $S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{1+x_{n+1}} > 1$, ko arī vajadzēja pierādīt.

42.35. a) Nē, nevar. Sauksim par pļāpai *A* vissvešāko pļāpu to pļāpu *B*, ar kuru pļāpa *A* runā kā ar pēdējo, un apzīmēsim *B* = *S* (*A*).

Lemma. Ja *B* = *S* (*A*), tad *A* = *S* (*B*).

Tiešām, ja pļāpa *B* pēc sarunas ar *A* runātu vēl ar kādu pļāpu *C*, tad viņa šīs sarunas laikā uzzinātu *C* jaunumu, ko saskaņā ar nosacījumu viņa vēl nezināja, runājot ar *A*, un arī neuzzināja, runājot ar *A*. Bet tā kā *A* pēc sarunas ar *B* vispār vairs nerunāja, tad *A* neuzzināja *C* jaunumu. Iegūtā pretruna pierāda lemmu.

No lemmas seko: pļāpas sadalās "savstarpēji vissvešāko" pļāpu pāros, tātad to skaits nevar būt nepāra skaitlis.

b)Nē, nevar. Pierādījums izmanto lemmu un analogu apgalvojumu par pirmo sarunu biedreni.

42.36. Viegli pārbaudīt, ka $10^{11}+1$ dalās ar 121. Tāpēc eksistē bezgalīgi daudzi tādi *k*, ka 10^k+1 dalās ar 121 (piemēram $k=11t$, t – nepāra skaitlis). Apzīmējam $10^k+1=121\cdot a$. Tad $10^{k-3} < a < 10^{k-2}$; tātad skaitlis *a* satur $k-2$ ciparus.

Apskatām skaitli $100a\left(10^k+1\right)=(110a)^2$; tas ir vajadzīgā tipa skaitlis, jo iegūstams, divas reizes pēc kārtas uzrakstot 100*a*.

42.37. Šī attiecība vienmēr ir lielāka par $\frac{1}{2}$ un mazāka par $\frac{3}{4}$.

42.38. Acīmredzot, nosacījumi viennozīmīgi nosaka a_{n+1}, atkarībā no a_n un a_{n-1} (pusslēgtā intervālā ar garumu 1 vienmēr ir tieši viens naturāls skaitlis).

Pierādīsim, ka virkne $x_1 = 2,\ x_2 = 7,\ x_{n+1} = 3x_n + 2x_{n-1}$ apmierina doto nevienādību. Tad $x_n = a_n$, un uzdevuma apgalvojums kļūst acīmredzams.

Ievērosim, ka

$$x_{n+1}\cdot x_{n-1} - x_n^2 = (3x_n + 2x_{n-1})x_{n-1} - x_n(3x_{n-1} + 2x_{n-2}) = -2\left(x_n x_{n-2} - x_{n-1}^2\right).$$

Tā kā $x_3 = 25$ un tāpēc $x_3 x_1 - x_2^2 = 1$, tad $x_{n+1}\cdot x_{n-1} - x_n^2 = (-2)^{n-2}$.

Tā kā $x_{n-1} \geq 2^{n-1}$ (to viegli pārbaudīt, izmantojot matemātisko indukciju), tad $\left| x_{n+1} - \frac{x_n^2}{x_{n-1}} \right| \leq \frac{1}{2}$ un vienādība pastāv tikai pie $n = 2$. Prasītais pierādīts.

42.39. Varam uzskatīt, ka $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$. Tad
$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots \frac{1}{x - x_n}$. Atvasinot, iegūstam

$$\frac{P''(x)P(x) - (P'(x))^2}{P^2(x)} = -\left(\frac{1}{(x - x_1)^2} + \frac{1}{(x - x_2)^2} + \cdots + \frac{1}{(x - x_n)^2} \right) < 0,$$

no kurienes seko prasītais, ja $x \neq x_i$. Ja $x = x_i$, doto nevienādību pārbauda tieši.

42.40. Ar indukciju pierāda, ka 2t + 1 delegātu gadījumā pietiek ar 3t jautājumiem.
Ja $t = 0$, apgalvojums ir acīmredzams. Pieņemam, ka apgalvojums pierādīts visiem skaitļiem, kas mazāks par *n*. Cipariņš prasa pēc kārtas prasa $d_2, d_3, \ldots$: “Kas ir d_1?”.

Tas turpinās, kamēr pirmo reizi iestājas viena no situācijām:

a) *n* aptaujātie saka, ka d_1 ir ķīmiķis. Tad d_1 tiešām ir ķīmiķis, un ar pārējiem jautājumiem viņš pareizi atbildēs par nenoskaidrotajiem delegātiem. Viegli pārbaudīt, ka kopā vajadzīgi 3*n* jautājumi.

b) Vairāk aptaujāto teikuši, ka d_1 ir alķīmiķis, nekā, ka d_1 ir ķīmiķis. Šajā gadījumā aptaujāts nepāra skaits delegātu; starp tiem un d_1 kopā alķīmiķu ir ne mazāk kā ķīmiķu. Starp atlikušajiem $2k+1$ delegātiem ķīmiķus un alķīmiķus var noskaidrot ar 3*k* jautājumiem pēc induktīvā pieņēmuma. Tagad mums ir zināms ķīmiķis, un pie viņa noskaidrojam visus šaubīgos delegātus. Viegli pārbaudīt, ka kopā vajadzīgi ne vairāk kā 3*n* jautājumi.