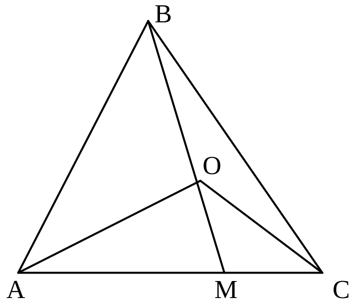
Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 43. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

43.1. Pagarinām *BO* līdz krustpunktam *M* ar *AC* (skat. 43.2. zīm.).



43.2. zīm.

Varam uzskatīt, ka $AM \geq MC$. Acīmredzami $BO < BM < BC = AC < AO + CO$. Līdzīgi pierāda, ka $AO < BO + CO$ un $CO < AO + OB$. Tātad nogriežņu *AO*, *BO* un *CO* garumi apmierina trijstūra nevienādību, un no šiem nogriežņiem var izveidot trijstūri.

43.2. Apzīmējam $xy = x + y = a$ un pierakstām otro vienādojumu kā

$$(x+y)^2 - 2xy = 1, \text{ no kurienes}$$

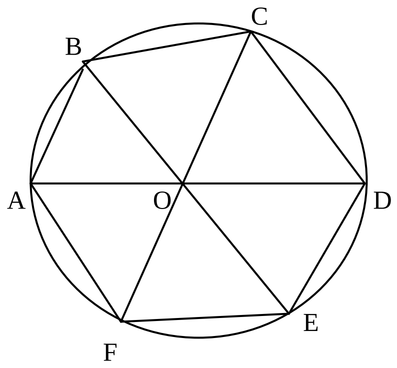
$$a^2 - 2a - 1 = 0, \text{ un } a = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Ja $a = 1 - \sqrt{2}$ iegūstam atbildes

$$x = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-1},\ y = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-1}\ ,$$

pretējā gadījumā atrisinājumu nav.

43.3. Skat. zīm. 43.3.



43.3. zīm.

Tā kā trijstūriem *ACO* un *ADO* ir vienādi pamati *AO* un *DO* un kopīgs augstums pret tiem, tad $S_{ACO} = S_{DCO}$. Līdzīgi pierāda, ka $S_{COE} = S_{FEO}$ un $S_{AOE} = S_{DOE}$.

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam, ka $S_{ACE} = S_{FCDE}$. Tā kā četrstūri *FCDE* un *CFAB* ir simetriski attiecībā pret *O*, tad to laukumi ir vienādi, tāpēc $S_{ABCDEF} = 2S_{FCDE} = 2S_{ACE}$.

43.4. Visus skaitļus sadalām grupās no k^2 līdz $(k+1)^2 - 1$ (pēdējā grupa ir nepilna). Katrā šādā grupā tieši trim skaitļiem izpildās prasītā īpašība: tie ir skaitļi k^2, $k^2 + k$ un $k^2 + 2k$. No šejienes seko, ka prasīto skaitļu daudzums ir 92.

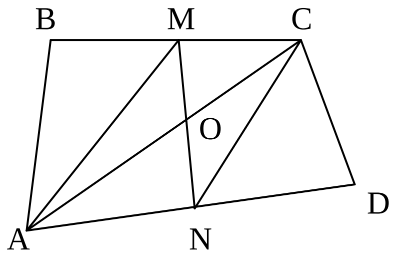
43.5. Pavisam ir 10^6 dažādu virknīšu. Pierādīsim, ka maksimālais kodu skaits ir 10^5.

1) Pieņemsim, ka kodu skaits ir lielāks par 10^5. Aplūkosim kodu pirmos piecus ciparus. Variantu skaits ir 10^5, tātad no Dirihlē principa seko, ka vismaz diviem kodiem pirmie 5 cipari sakritīs.

2) 10^5 kodus var izveidot šādi: ņemam virknes, kurām pirmie 5 cipari ir patvaļīgi (tādu pavisam ir 10^5); pēdējo ciparu izvēlamies tā, lai skaitļa ciparu summa dalītos ar 10. Viegli pārbaudīt, ka divas šādas virknes atšķiras vismaz divās vietās.

43.6. Apzīmēsim $a = \frac{1}{2} + \alpha$; tad $b = \frac{1}{2} - \alpha$ un
$a^3 + b^3 = \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)^3 + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^3 = \frac{1}{8} + \frac{3}{4}\alpha + \frac{3}{2}\alpha^2 + \alpha^3 + \frac{1}{8} - \frac{3}{4}\alpha + \frac{3}{2}\alpha^2 - \alpha^3 = \frac{1}{4} + 3\alpha^2 \geq \frac{1}{4}$.

43.7. Tā kā trijstūriem, kuru pamati ir vienādi un atbilstošie augstumi ir vienādi, laukumi ir vienādi, tad $S_{AMO} = S_{ANO}$ un $S_{CMO} = S_{CNO}$ (skat. 43.4.zīm.).



43.4. zīm.

$S_{AMC} = S_{AMO} + S_{CMO} = S_{ANO} + S_{CNO} = S_{ANC}$.

Tātad $S_{ABC} = 2S_{AMC} = 2S_{ANC} = S_{ADC}$.

43.8. Atverot iekavas, pārveidojumu ceļā pakāpeniski iegūstam

$$n^2 + n^2 + 2n + 1 = m^4 + m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1$$

$$2n^2 + 2n = 2m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m$$

$$n^2 + n + 1 = m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m + 1$$

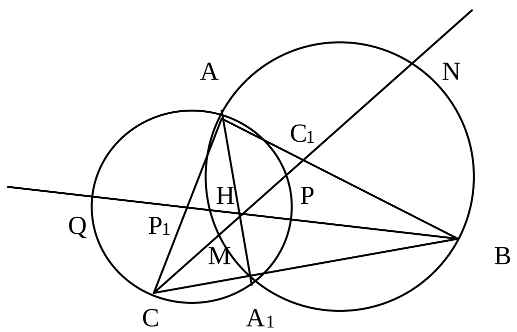
$$n^2 + n + 1 = (m^2 + m + 1)^2$$

Bet $n^2 + n + 1$ nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts, jo atrodas starp divu viens otram sekojošus naturālu skaitļu kvadrātiem:

$$n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2.$$

Tātad vienādojumam atrisinājuma naturālos skaitļos nav.

43.9. Saskaņā ar teorēmu par ievilktu leņķi, kas balstās uz diametru, riņķa līnijas iet caur augstuma pamatiem, kā parādīts 43.5.zīmējumā



43.5. zīm.

Saskaņā ar teorēmu par hordu nogriežņu reizinājumiem $HP \cdot HQ = HA \cdot HA_1$ (kreisā riņķa līnija) un $HA \cdot HA_1 = HM \cdot HN$ (labā riņķa līnija). Tātad $HP \cdot HQ = HM \cdot HN$.

No pēdējās vienādības seko, ka $\frac{HQ}{HM} = \frac{HN}{HP}$, tātad trijstūri QHM un NHP ir līdzīgi (leņķis un tā piemalu proporcionalitāte). Tāpēc $\angle PQM = \angle PNM$, no kurienes seko ari vajadzīgais.

43.10. Apzīmēsim ar *a* to nenulles ciparu, kas pirmo reizi parādās skaitļa *A* pierakstā vēlāk par visiem pārējiem; skaidrs, ka *a* ir devītais vai vēl tālāks cipars. Ar *b* apzīmēsim to no *a* atšķirīgo ciparu (varbūt arī 0), kas pirmo reizi *A* pierakstā pēc jau minētās *a* parādīšanās parādās vēlāk par visiem citiem; skaidrs, ka *b* ir astoņpadsmitais vai vēl tālāks cipars. Aiz *b* skaitļa *A* pierakstā ir ne vairāk kā $25-18=7$ cipari, tātad vismaz viens no cipariem, kas atšķiras gan no *a*, gan no *b*, tur nav sastopams; apzīmēsim to ar *c*. Skaidrs, ka $\overline{abc}$ ir trīsciparu skaitlis ar vajadzīgo īpašību.

43.11. Ievērosim, ka $\frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ (divi divnieki);

$$\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{1}{1\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \text{ (trīs divnieki).}$$

Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka tādas izteiksmes vērtība, kas satur *n* divniekus, ir $\frac{n}{n+1}$. Bāze jau pārbaudīta. Induktīvās parejas pareizība seko no vienādības

$$\frac{1}{2-\frac{k}{k+1}} = \frac{1}{\frac{2k+2-k}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2} = \frac{(k+1)}{(k+1)+1}.$$

Atliek atzīmēt, ka *n* un $n+1$ ir savstarpēji pirmskaitļi (ja tie abi dalītos ar kādu *d*, tad ar d būtu jādalās arī starpībai $(n+1)-n=1$, bet 1 no naturāliem skaitļiem dalās tikai ar 1).

Tātad uzdevuma atbilde ir $\frac{1993}{1994}$.

43.12. Apzīmēsim trijstūra malu garumus ar *a*, *b*, *c*, laukumu ar *S*, pusperimetru ar *p*, ievilktās un apvilktās riņķa līniju rādiusus atbilstoši ar *r* un *R*.

No pazīstamajām formulām

$$S = \frac{abc}{4R} = pr \text{, tātad}$$

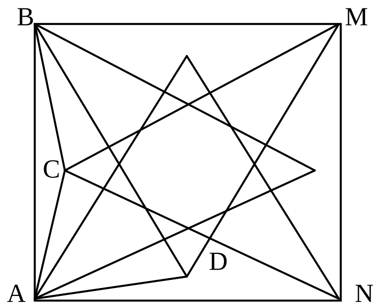
$$\frac{abc}{4R} = pr \text{ un } 4Rr = \frac{abc}{p} \text{ jeb}$$

$$\left(2R\right)\cdot\left(2r\right)=ab\cdot\frac{c}{p}.$$

Ja pierādīsim, ka $\frac{c}{p}<1$, tad no pēdējās vienādības seko, ka $ab>\left(2R\right)\cdot\left(2r\right)$, bet $\frac{c}{p}<1\Leftrightarrow c<\frac{a+b+c}{2}\Leftrightarrow c<a+b$, kas ir taisnība saskaņā ar trijstūra nevienādību.

Kā redzams, nekur netika izmantots nosacījums par to, ka trijstūris ir šaurleņķa.

43.13. Jā, var. Piemēram, 8 punktu kopa, kas sastāv no kvadrāta virsotnēm un tādu vienādmalu trijstūru virsotnēm, kas konstruēti uz kvadrāta malām ka pamatiem tā iekšpusē (skat 43.6. zīm.)



43.6. zīm.

Vienīgais netriviāli pārbaudāmais gadījums – pierādīt, ka *B* un *C* atrodas uz *AD* vidusperpendikula (un vēl 7 gadījumi, kas reducējas uz šo ar pagriešanu vai spoguļattēlošanu). Par *B* tas ir skaidrs (*AB* = *DB*, jo abi nogriežņi vienādi ar kvadrāta malu). Lai pierādītu to par *C*, pietiek pierādīt, ka $\angle CAD=60°$; tad vienādsānu trijstūris *CAD* (simetrijas pēc) būs regulārs, tāpēc *CD* = *CA*.

Tā kā $\angle CNM=60°$, tad $\angle CNA=30°$. Tad vienādsānu trijstūrī *CAN* iegūstam $\angle CAN=\frac{180°-30°}{2}=75°$. Tāpēc $\angle BAC=90°-75°=15°$. Analogi $\angle DAN=15°$. Tāpēc $\angle CAD=90°-15°-15°=60°$, ko arī vajadzēja pierādīt.

43.14. Tāds skaitlis ir 38.

1) Vienādības 38 = <u>37</u> + <u>1</u> = 35 + <u>3</u> = 33 + <u>5</u> = <u>31</u> + <u>7</u> = <u>29</u> + 9 = 27 + <u>11</u> = 25 + <u>13</u> = <u>23</u> + 15 = 21 +<u>17</u> = <u>19</u> + <u>19</u> (katrā pārī pasvītroti saskaitāmie, kas nav salikti skaitļi) parāda, ka 38 nevar izsacīt kā divu nepāra saliktu skaitļu summu.

2) Ja $2n > 38$, apskatām vienādības

$$2n = (2n - 15) + 15$$

$$2n = (2n - 25) + 25$$

$$2n = (2n - 35) + 35$$

Saskaitāmie 15; 25; 35 ir salikti nepāra skaitļi; saskaitāmie ($2n$ – 15); ($2n$ – 25); ($2n$ – 35) ir nepāra skaitļi, kas lielāki par 3. Šķirojot gadījumus atkarībā no tā, kādu atlikumu dod n dalot ar 3, iegūstam, ka vismaz viens no skaitļiem ($2n$ – 15); ($2n$ – 25); ($2n$ – 35) dalās ar 3. Tiešām:

$$2 \cdot 3k - 15 \text{ dalās ar 3;}$$

$$2 \cdot (3k+1) - 35 = 6k - 33 \text{ dalās ar 3;}$$

$$2 \cdot (3k+2) - 25 = 6k - 21 \text{ dalās ar 3.}$$

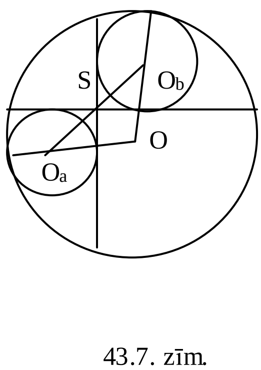
Atbilstošā vienādība arī norāda, ka izsacīt atbilstošo skaitli $2n$ kā divu saliktu nepāra skaitļu summu.

43.15. Ja deputāts ietilpst frakcijā, kurā pavisam ir x dalībnieki, teiksim, ka viņam ir svars $\frac{1}{x}$. Pieņemsim, ka deputātu svari pirmajā sadalījuma bija $a_1, a_2, \ldots, a_n$, bet otrajā – atbilstoši $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Mums jāpierāda, ka vismaz pieciem dažādiem indeksiem i pastāv nevienādība

$$b_i > a_i .$$

Skaidrs, ka visu svaru summa pirmajā sadalījumā ir 12, bet otrajā tā ir 16, un neviena deputāta svars nav lielāks par 1. Ja tikai četru (vai mazāk) deputātu svari ir palielinājušies, tad kopējā palielināšanās notikusi par lielumu, kas mazāks par 4 (jo deputāta svars palielinās no pozitīva skaitļa līdz skaitlim, kas nepārsniedz 1), un kopējā summa nevar pieaugt no 12 līdz 16.

43.16.



43.7. zīm.

Apzīmēsim abu ievilkto riņķa līniju rādiusus ar a un b, centrus ar O_a un O_b, liela riņķa centru ar O, abu hordu krustpunktus ar S. Aplūkosim trijstūri O_aO_bO. Skaidrs, ka

$OO_b = R - b$; $OO_a = R - a$; $O_aO_b = O_aS + SO_b = a\sqrt{2} + b\sqrt{2}$. No trijstūru nevienādības trijstūrim O_aO_bO seko, ka

$$(R-a)+(R-b) > (a+b)\sqrt{2} \text{ jeb}$$

$$2R > (a+b)\left(\sqrt{2}+1\right); \text{ tātad}$$

$$a+b < \frac{2R}{\sqrt{2}+1} = 2R\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Ja trijstūris O_aO_bO deģenerējas par nogriezni, nevienādības vietā pastāv vienādība.

43.17. Der, piemēram, vienādība

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd = \left(a^2 - b^2\right)^2 + \left[\sqrt{2}(ab - cd)\right]^2 .$$

43.18. Acīmredzot pietiek pierādīt, ka kaut kādu divu no leņķiem *A*, *B*, *C*, *D* summa ir 180°. Ja tie ir pēc kārtas ņemti četrstūra leņķi, tas ir trapece; ja tie ir pretēji leņķi, četrstūris ir ievilkts riņķa līnijā.

Ievērosim, ka $A+B+C+D = 360°$; tāpēc $\frac{A+B}{2} = 180° - \frac{C+D}{2}$.

No šejienes iegūstam:

$$\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} =$$

$$2\cos\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{C-D}{2}\right] = 0.$$

Ja $\cos\frac{A+B}{2} = 0$, tad iegūstam $A+B = 180°$.

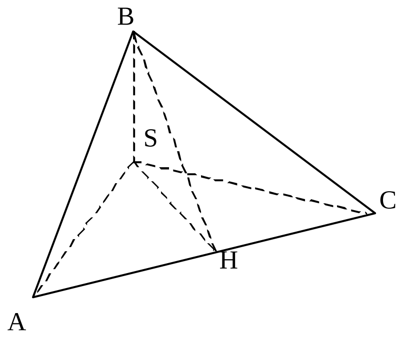
Ja $\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{C-D}{2} = 0$, tad iegūstam

$$-2\sin\frac{A-B+C-D}{4}\sin\frac{A-B-C+D}{4} = 0.$$

Ievērosim, ka $\left|\frac{A-B+C-D}{4}\right| < \left|\frac{A+B+C+D}{4}\right| = 90°$. Tāpēc, ja $\sin\frac{A-B+C-D}{4} = 0$, tad $A-B+C-D = 0°$ un $A+C = B+D = 180°$, kas arī bija jāpierāda. Līdzīgi aplūko gadījumu, kad $\sin\frac{A-B-C+D}{4} = 0$.

43.19. Figūras *F* laukumu apzīmēsim ar [*F*].

Lemma. Ja trijstūra piramīdā *SABC* pastāv sakarības $SA \perp SB$, $SA \perp SC$ un $SB \perp SC$, tad $[ABC]^2 = [SAB]^2 + [SAC]^2 + [SBC]^2$ (skat. 43.8. zīm.).



43.8. zīm.

Novelkam $SH \perp AC$. Pēc triju perpendikulu teorēmas arī $BH \perp AC$.

Apzīmēsim $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Tā kā $\frac{ac}{2} = [ASC]$, tad $SH = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$.

Apzīmēsim $\angle BHS = \varphi$. Iegūstam $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b\sqrt{a^2 + c^2}}{ac}$.

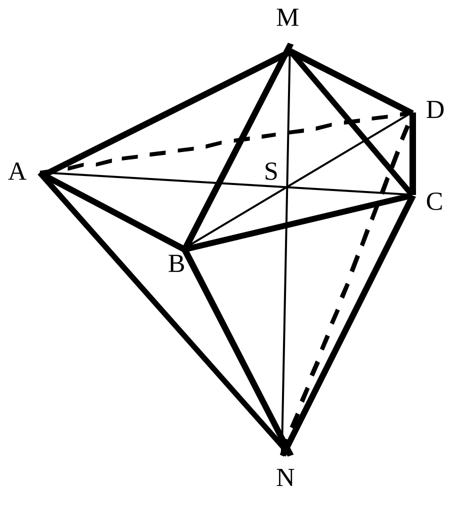
$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{ac}{\sqrt{a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2}}$. Tāpēc

$[ABC] = \frac{[ASC]}{\cos\varphi} = \frac{ac}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2}}{ac} =$

$\sqrt{\left(\frac{ac}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2} = \sqrt{[ASC]^2 + [ASB]^2 + [BSC]^2}$.

Lemma pierādīta.

Aplūkosim zīmējumu 43.9.



43.9. zīm.

Tagad viegli pierādīt, ka

$[AMD]^2 + [BMC]^2 + [DNC]^2 + [ANB]^2 = [DNC]^2 + [AMB]^2 + [AND]^2 + [BNC]^2$.

Tiešām, izmantojot lemmu un izsakot visu astoņu skaldņu laukumu kvadrātus ar to taisnleņķa trijstūra laukumu kvadrātiem, kuru taisnā leņķa virsotne ir *S*, iegūstam, ka abās vienādības pusēs ir visu 12 šo taisnleņķa trijstūru laukumu kvadrātu summa.

43.20. Pieņemsim, ka dotie skaitļi ir sakārtoti virknē

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_{63}, s_{64},$$

un to dažādās vērtības ir a, b, c, d, e, f.

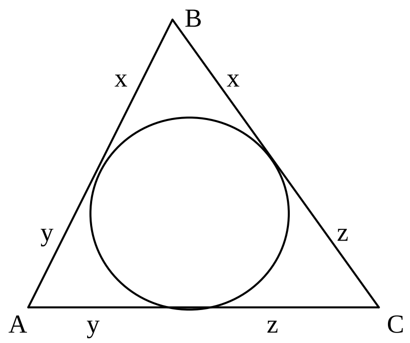
Katram *n* no 1 līdz 64 apskatīsim reizinājumu $s_1 s_2 \cdot \ldots \cdot s_n$ un piekārtosim tam sešu burtu virknīti, kas sastāv no burtiem *p* un *n*.

Pirmais burts norāda, vai šajā reizinājumā *a* ir ar pāra vai nepāra kāpinātāju; otrais burts – vai *b* tajā ir ar pāra vai nepāra kāpinātāju, utt.

Pavisam iespējamas 64 burtu *p* un *n* virknes garumā 6. Aplūkosim divus gadījumus.

1) Kāda no piekārtotajām virknītēm ir *pppppp*. Tad atbilstošais reizinājums ir kvadrāts.
2) Virknītes *pppppp* starp piekārtotajām nav. Tad divas piekārtotās virknītes ir vienādas. Ja tās piekārtotas reizinājumiem $s_1 s_2 \cdot \ldots \cdot s_k$ un $s_1 s_2 \cdot \ldots \cdot s_t$ ($k < t$), tad reizinājums $s_{k+1} s_{k+2} \cdot \ldots \cdot s_t$ katru no reizinātājiem a, b, c, d, e, f satur ar pāra kāpinātāju, tātad ir naturāla skaitļa kvadrāts.

43.21. *Lemma.* Ievilktā riņķa līnija, pieskaroties trijstūra malām, sadala tās nogriežņos ar garumiem $\frac{a+b-c}{2}, \frac{a-b+c}{2}, \frac{c+b-a}{2}$ (skat. 43.10. zīm.).

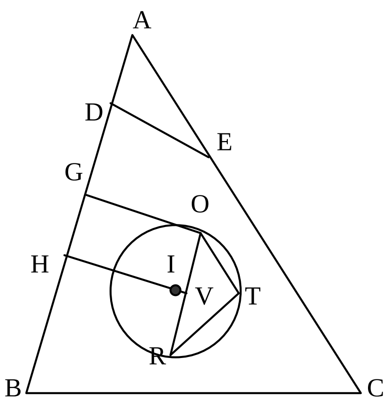


43.10. zīm.

Pierādījums iegūstams, atrisinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + y = c \\ x + z = a \\ y + z = b. \end{cases}$$

Ar O apzīmēsim ap ΔABC apvilktās riņķa līnijas centru, ar I – tajā ievilktās riņķa līnijas centru (skat. 43.11. zīm.).



43.11. zīm.

Novilksim riņķa līniju ar centru I un rādiusu IO. Novelkam tajā hordas $OR \parallel AB$ un $OT \parallel AC$. Ja pierādīsim, ka $\Delta EDA = \Delta RTO$, vajadzīgais būs pierādīts.

Apzīmējam OR viduspunktu ar V, AB viduspunktu ar G, ievilktās riņķa līnijas pieskaršanās punktu malai AB ar H. Tad $OG \perp AB$, $OG \perp OR$, $IH \perp AB$, $IV \perp OR$, $AH = \dfrac{c+b-a}{2}$, $GH = \dfrac{c+b-a}{2} - \dfrac{c}{2} = \dfrac{b-a}{2}$, $OR = 2OV = 2GH = b-a = AE$.

Līdzīgi pierāda, ka $OT=AD$, Tā kā $\angle TOR = \angle DAE$ kā leņķi ar savstarpēji paralēlām malām, tad vajadzīgā trijstūru vienādību pierādīta.

43.22. Izsacīsim $n = 2^k \cdot t$ **,** kur t – nepāra skaitlis. Tad

$$a^n - 1 = a^{2^k t} - 1 = \left(a^{2^k} - 1\right) \cdot \left(\left(a^{2^k}\right)^{t-1} + \left(a^{2^k}\right)^{t-2} + \cdots + a^{2^k} + 1\right).$$

Otrajā iekavā ir t (nepāra skaitlis) nepāra saskaitāmo, tātad tās vērtība ir nepāra skaitlis. Tātad $a^n - 1$ dalās ar kādu divnieka pakāpi tad un tikai tad, ja ar šo divnieka pakāpi dalās $a^{2^k} - 1$.

Tālāk atzīmēsim, ka

$$a^{2^k} - 1 = (a-1)(a+1)\left(a^2+1\right)\left(a^4+1\right)\cdots\left(a^{2^{k-1}}+1\right).$$

Tā kā nepāra skaitļa kvadrāts, dalot ar 4, dod atlikumā 1, tad $a^{2^l} + 1$ $(1 \le l \le k-1)$ dalās ar 2, bet nedalās ar 4. Tātad, ja $k = 0$, tad $a^n - 1$ dalās ar tādu divnieka pakāpi, ar kādu dalās $a - 1$; ja $k > 0$, tad $a^n - 1$ dalās ar tādu divnieka pakāpi, ar kādu dalās $a^2 - 1$, un vēl ar 2^{k-1}.

Tagad aplūkosim atsevišķi pāra un nepāra skaitļus n.

1) Ja n – nepāra skaitlis, tad $k=0$. Tad, saskaņā ar minēto, tad a^n-1 dalās ar tādu divnieka pakāpi, ar kādu dalās $a-1$; to ir tikai galīgs skaits. Tātad tādu n, ka a^n-1 dalās ar 2^n, ir tikai galīgs skaits.
2) Ja n – pāra skaitlis, tad, saskaņā ar minēto, lai a^n-1 dalītos ar 2^n, jābūt $\operatorname{ord}_2(a^2-1)+k-1\geq n$; $\operatorname{ord}_2(a^2-1)$ ir konstante c un $k\leq\log_2 n$. Tātad jābūt
$$c+\log_2 n\geq n.$$
skaidrs, ka šāda nevienādība izpildās tikai galīgam skaitam n vērtību.

43.23. Ja $n\geq 2$, no dotās formulas iegūstam vienādības
$$nx_n=-1993(x_0+x_1+\cdots+x_{n-1}) \text{ un}$$
$$(n-1)x_{n-1}=-1993(x_0+x_1+\cdots+x_{n-2})$$
Atņemot no pirmās vienādības otro un pārveidojot, iegūstam
$$nx_n-(n-1)x_{n-1}=-1993x_{n-1} \quad\Rightarrow\quad x_n=-\frac{1993-(n-1)}{n}x_{n-1}.$$
Viegli pārbaudīt, ka šī formula pareiza arī pie $n=1$. Tādēļ
$$x_n=-\frac{1993-(n-1)}{n}x_{n-1}=\frac{1993-(n-1)}{n}\cdot\frac{1992-(n-2)}{n-1}\cdot x_{n-2}=\cdots=$$
$$(-1)^n\frac{1993\cdot 1992\cdot\cdots\cdot(1993-(n-1))}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}x_0=(-1)^n\cdot C_{1993}^n\cdot 1993.$$
Tāpēc prasītā summa ir
$$2^0\cdot 1993-2^1\cdot C_{1993}^1\cdot 1993+2^2\cdot C_{1993}^2\cdot 1993-\cdots+(-1)^{1993}\cdot 2^{1993}\cdot C_{1993}^{1993}\cdot 1993=$$
$$1993\cdot(1-2)^{1993}=-1993.$$
Izmantota Ņūtona binoma formula.

43.24. Apskatīsim atbilstošo orientēto grafu. Pieraksts $A\to B$ nozīmēs, ka komanda *A* uzvarējusi komandu *B*.

Apskatīsim maksimālo ciklu, kāds izveidojas pēc turnīra beigām:
$$K_1\to K_2\to\cdots\to K_m\to K_1.$$
Ja $m=n$, tad izpildās a) punkts.

Pieņemsim, ka $m<n$. Aplūkosim vairākus gadījumus.

1) $m=2$. Skaidrs, ka tā nevar būt.
2) $m=1$ (t.i. ciklu vispār nav). Tātad izpildās tranzitivitāte:
$$\text{ja } (A\to B) \text{ un } (B\to C) \text{ tad } (A\to C).$$
Šajā gadījumā komanda *A* ar lielāko uzvaru skaitu ir uzvarējusi visas pārējās. Tiešām, ja kāda cita komanda būtu uzvarējusi *A*, tad tai būtu vairāk uzvaru. Tāpēc šī komanda *A* var veidot vienu grupu, bet pārējās – otru grupu.

3) $m \geq 3$. Apzīmēsim ar Y patvaļīgu komandu, kas atšķiras no $K_1, K_2, \ldots, K_m$. Skaidrs, ka vai nu Y uzvarējusi pret visām šī cikla komandām, vai arī pret visām tām zaudējusi: pretējā gadījumā atrastos divas tādas blakus komandas ciklā , ka $K_i \to Y \to K_{i+1}$, un ciklu varētu pagarināt.

Tātad visas komandas var sadalīt trīs grupās:

grupa C: maksimālā cikla komandas;

grupa U: tās komandas, kas uzvarējušas pret visām C komandām;

grupa Z: tās komandas, kas zaudējušas pret visām C komandām.

Neviena grupas Z komanda z nevar būt uzvarējusi nevienu grupas U komandu u. Pretējā gadījumā ciklu varētu pagarināt, izmantojot virkni $K_1 \to z \to u \to K_2$.

Vai nu grupa U, vai grupa Z nav tukšas. Pirmajā gadījumā varam ņemt grupu U un pārējos; otrajā gadījumā grupu Z un pārējos.

43.25. Apskatīsim doto vienādību

$$f(m+n)+f(m-n)=2f(m)f(n) \tag{1}$$

Ievietojot vienādībā (1) $m=n=0$, iegūstam

$$2f(0)=2(f(0))^2,$$

no kurienes vai nu $f(0)=0$, vai $f(0)=1$.

A. Ja $f(0)=0$, ievietojam vienādībā (1) $n=0$; iegūstam $2f(m)=0$, no kurienes $f(m)=0$. Šī funkcija apmierina uzdevuma nosacījumus.

B. Ja $f(0)=1$, ievietojam vienādībā (1) $n=m$. Tad

$$f(2n)=2(f(n))^2-1.$$

Ja $|f(n)|>1$, tad , izmantojot iepriekšējo formulu, viegli pierādīt, ka $f(x)$ ir neierobežota. Tāpēc $f(n)\in\{-1;0;1\}$.

Ievietojot vienādībā (1) $m=0$, iegūstam

$$f(-n)=2f(n)f(0)-f(n)=f(n). \tag{2}$$

C.1. Ja $f(1)=1$, tad, ievietojot vienādībā (1) $m=n=1$, iegūstam

$$f(2)=2(f(1))^2-f(0)=1;$$

Ievietojot vienādībā (1) $m=2, n=1$, iegūstam

$$f(3)=2f(2)f(1)-f(1)=1,$$

utt.; visiem naturāliem n izpildās vienādība $f(n)=1$. No sakarības (2) seko, ka tā izpildās visiem veseliem skaitļiem. Tātad $f(n)=1$ ir otra funkcija, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

C.2. Ja $f(1)=-1$, tad no (1) seko

$$m = 1,\ n = 1 \quad \Rightarrow \quad f(2) = 2\left(f(1)\right)^2 - f(0) = 1$$
$$m = 2,\ n = 1 \quad \Rightarrow \quad f(3) = 2f(2)f(1) - f(1) = -1$$
$$m = 3,\ n = 1 \quad \Rightarrow \quad 2f(4) = 2f(3)f(1) - f(2) = 1, \quad \text{utt.}$$

Ar matemātisko indukciju pierādām, ka $f(n) = (-1)^n$; pārbaude parāda, ka arī šī funkcija apmierina uzdevuma nosacījumus.

C.3. $f(1) = 0$. Ar līdzīgām metodēm šajā gadījumā iegūstam funkciju

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{ja } n = 2k+1 \\ 1, & \text{ja } n = 4m \\ -1, & \text{ja } n = 4m+2. \end{cases}$$