Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 43. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

9. klase

43.1. Vienādmalu trijstūra *ABC* iekšpusē atrodas punkts *O*. Pierādīt, ka eksistē trijstūris, kura malas vienādas ar *OA*, *OB* un *OC*.

43.2. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} xy = x + y \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

43.3. Sešstūris *ABCDEF* ievilkts riņķī, kura diametri ir *AD*, *BE* un *CF*. Pierādīt, ka sešstūra *ABCDEF* laukums divas reizes lielāks par trijstūra *ACE* laukumu.

43.4. Ar $[x]$ apzīmēsim lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz *x*.
Cik no 1 līdz 1000 ieskaitot ir tādu veselu skaitļu *n*, kas dalās ar $\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$?

43.5. Ilīrijas armijā katra karavīra kods ir tikai viņam piešķirta 6-ciparu virknīte. Pieļaujama jebkura virknīte, bet katriem diviem kodiem jāatšķiras vienam no otra vismaz divās vietās.
Kāds lielākais karavīru skaits var būt Ilīrijas armijā?

10. klase

43.6. Dots, ka $a + b = 1$. Pierādīt, ka $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$.

43.7. Izliektā četrstūrī *ABCD* malu *BC* un *AD* viduspunkti ir atbilstoši *M* un *N*. Diagonāle *AC* dala *MN* uz pusēm. Pierādīt, ka trijstūru *ABC* un *ADC* laukumi ir vienādi.

43.8. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu
$n^2 + (n+1)^2 = m^4 + (m+1)^4$.

43.9. Šaurleņķa trijstūrī *ABC* riņķa līnija, kas konstruēta uz *AC* kā diametra, krusto augstumu BB_1 un tā pagarinājumus punktos *P* un *Q*, bet riņķa līnija, kas konstruēta uz *AB* kā diametra, krusto augstumu CC_1 un tā pagarinājumus punktos *M* un *N*. Pierādīt, ka punkti *P*, *Q*, *M* un *N* atrodas uz vienas riņķa līnijas.

43.10. Ar *A* apzīmēsim patvaļīgu 25-ciparu skaitli. Pierādīt, ka eksistē tāds trīsciparu skaitlis, kura visi cipari dažādi un kura pierakstu nevar iegūt no *A* pieraksta, izsvītrojot no tā 22 ciparus.

11. klase

43.11. Aprēķināt izteiksmes

$$\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2}}}}} \qquad \text{(1993 divnieki)}$$

vērtību, izsakot to kā nesaīsināmu daļu.

43.12. Pierādīt, ka šaurleņķa trijstūrī divu malu reizinājums lielāks par ievilktās un apvilktās riņķa līniju diametru reizinājumu.

43.13. Vai var uzzīmēt plaknē galīgu punktu kopu *S* tā, lai katra tāda nogriežņa vidusperpendikuls, kura gali ir no kopas *S*, saturētu tieši divus *S* punktus.

43.14. Atrast vislielāko pāra skaitli, kuru nevar izsacīt kā divu saliktu nepāra skaitļu summu.

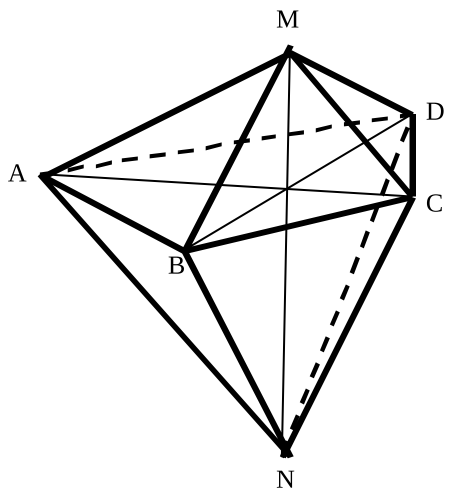
43.15. Pēc parlamenta ievēlēšanas izveidoja 12 frakcijas (katrs deputāts ietilpa tieši vienā frakcijā). Pēc pirmās plenārsēdes deputātu uzskati mainījās, un viņi apvienojās 16 jaunās frakcijās (katrs deputāts joprojām ietilpa tieši vienā frakcijā).
Pierādīt, ka vismaz 5 deputāti tagad atrodas mazākās frakcijās nekā uzreiz pēc parlamenta ievēlēšanas.

43.16. Riņķī ar rādiusu *R* novilktas divas savstarpēji perpendikulāras hordas. Divos to veidotajos krustleņķos ievilkts pa riņķa līnijai, kas iekšēji pieskaras arī sākotnējai riņķa līnijai. Pierādīt, ka to rādiusu summa nepārsniedz lielumu $2\left(\sqrt{2}-1\right)R$.

43.17. Izsacīt izteiksmi $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd$ kā tādu izteiksmju kvadrātu summu, kurās ar lielumiem *a*, *b*, *c*, *d* veiktas tikai reizināšanas, saskaitīšanas un atņemšanas operācijas.

43.18. Izliektā četrstūrī *ABCD* zināms, ka $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$. Pierādīt, ka *ABCD* ir vai nu trapece, vai arī riņķī ievilkts četrstūris.

43.19. Daudzskaldnim, kas attēlots 43.1. zīmējumā, diagonāles *AC*, *BD* un *MN* pa pāriem savstarpēji perpendikulāras un krustojas vienā punktā.



43.1. zīm.

43.20. Rindā izrakstīti 64 naturāli skaitļi; starp tiem ir tikai 6 dažādi. Pierādīt, ka var atrast dažus pēc kārtas izrakstītus skaitļus (varbūt vienu pašu) tā, lai to reizinājums būtu naturāla skaitļa kvadrāts.

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

43.21. Šaurleņķa trijstūrī *ABC* zināms, ka $AC > AB > BC$. Uz malām *AB* un *AC* atlikti atbilstoši punkti *D* un *E* tā, ka $BD = CE = BC$. Pierādīt, ka ap ΔADE apvilktās riņķa līnijas rādiuss vienāds ar attālumu starp ΔABC apvilktās un ievilktās riņķa līniju centriem.

43.22. Dots naturāls skaitlis $a > 2$. Pierādīt, ka eksistē tikai galīgs skaits tādu naturālu *n*, ka $a^n - 1$ dalās ar 2^n.

43.23. Skaitļu virkni $x_0, x_1, \ldots$ definē ar nosacījumiem

$$x_0 = 1993, \quad x_n = -\frac{1993}{n}\left(x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}\right), \text{ ja } n = 1, 2, \ldots .$$

Aprēķināt izteiksmes $2^0 \cdot x_0 + 2^1 \cdot x_1 + \cdots + 2^{1993} \cdot x_{1993}$ vērtību.

43.24. Turnīrā piedalās *n* komandas, $n \geq 2$. Katra spēlē ar katru tieši vienu reizi; neizšķirtu nav. Pierādīt, ka pēc turnīra beigām noteikti pastāv viena no divām iespējām:

a) visas komandas var sanumurēt ar numuriem 1, 2, … , *n* tā, ka pirmā komanda uzvarējusi otro, otrā – trešo, … , (*n*-1)-ā uzvarējusi *n*-to, *n*-tā – pirmo,

b) visas komandas var sadalīt divās grupās tā, ka katra pirmās grupas komanda uzvarējusi katru otrās grupas komandu.

43.25. Funkcija $f(n)$ definēta visām veselām *n* vērtībām, un tās vērtības ir veseli skaitļi. Zināms arī, ka

a) visiem veseliem *m* un *n* pastāv vienādība

$$f(m+n) + f(m-n) = 2f(m) \cdot f(n),$$

b) funkcija $f(n)$ ir ierobežota.

Atrast visas šādas funkcijas.