Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 44. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

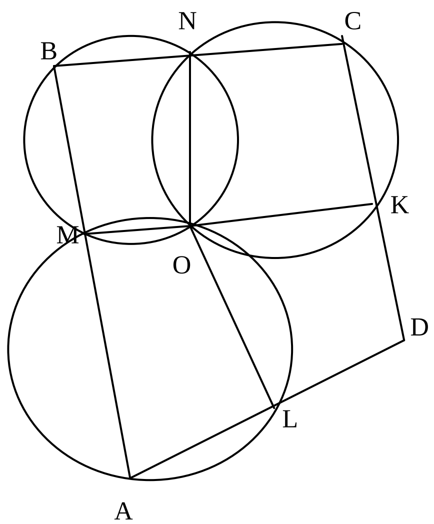
44.1 Pārveidojot iegūstam

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Tā kā *p* ir pāra skaitlis, tad $\frac{p}{2}$ ir vesels skaitlis. Tāpēc pie $x=-\frac{p}{2}$ *y* jābūt lielākam vai vienādam par 0. Tas nozīmē, ka $\left(q-\frac{p^2}{4}\right) \geq 0$.

Visiem *x* izpildās $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \geq 0$. Tāpēc visiem *x* arī $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right) \geq 0$, t.i., $x^2+px+q \geq 0$.

44.2. Tā kā četrstūris *AMOL* ir ievilkts riņķa līnijā, tad $\angle A+\angle MOL=180^0$, $\angle MOL = 180° - \angle A$. Līdzīgi $\angle MON = 180° - \angle B$ un $\angle NOK = 180° - \angle C$.



44.3. zīm.

Tātad

$\angle KOL + \angle D = [360° - (180° - \angle A) - (180° - \angle B) - (180° - \angle C)] + \angle D =$
$(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) - 180° = 360° - 180° = 180°$

un ap četrstūri *LOKD* var apvilkt riņķa līniju.

44.3. Pārbaudot pēc moduļiem 2, 3, 5, redzam, $n^5 - n$ vienmēr dalās ar šiem skaitļiem. Piemēram, pēc moduļa 3:
$0^5 - 0 \equiv 0 \pmod 3$, $1^5 - 1 \equiv 0 \pmod 3$, $2^5 - 2 = 30 \equiv 0 \pmod 3$.

Tātad skaitlis vienmēr dalās ar 30.

120=8·15, 8 un 15 ir savstarpēji pirmskaitļi.

Tā kā $n^5 - n$ dalās ar 30 tad $n^5 - n$ vienmēr dalās ar 15. Atliek noskaidrot, kad $n^5 - n$ dalās ar 8.

Uzrakstām $n^5 - n$ vērtību tabulu pēc moduļa 8
$n \equiv 0 \pmod 8$, $n^5 - n \equiv 0 \pmod 8$; $n \equiv 1 \pmod 8$, $n^5 - n \equiv 0 \pmod 8$;
$n \equiv 2 \pmod 8$, $n^5 - n \equiv 6 \pmod 8$; $n \equiv 3 \pmod 8$, $n^5 - n \equiv 0 \pmod 8$;
$n \equiv 4 \pmod 8$, $n^5 - n \equiv 4 \pmod 8$; $n \equiv 5 \pmod 8$, $n^5 - n \equiv 0 \pmod 8$;
$n \equiv 6 \pmod 8$, $n^5 - n \equiv 2 \pmod 8$; $n \equiv 7 \pmod 8$, $n^5 - n \equiv 0 \pmod 8$;

Redzam, ka prasītais izpildās, ja *n*, dalot ar 8, dod atlikumus 0, 1, 3, 5, 7.

44.4. Katru daudzstūri sagriežam trijstūros. Katru no šiem trijstūriem sagriežam platleņķa trijstūros, savienojot tajā ievilktās riņķa līnijas centru ar trijstūra virsotnēm (Pierādiet, ka visi leņķi pie ievilktās riņķa līnijas centra ir plati)

44.5. Nē, nevar. Katrs gājiens izmaina konfekšu skaita paritāti visos grozos. Tātad vienmēr nepāra skaits konfekšu būs 3 grozos (kā sākumā), un visas konfektes vienā grozā ievietot nevarēs.

44.6. No Vjeta teorēmas iegūstam:
$$\begin{cases} 2p + 2q = -p \\ 4pq = q \end{cases}.$$

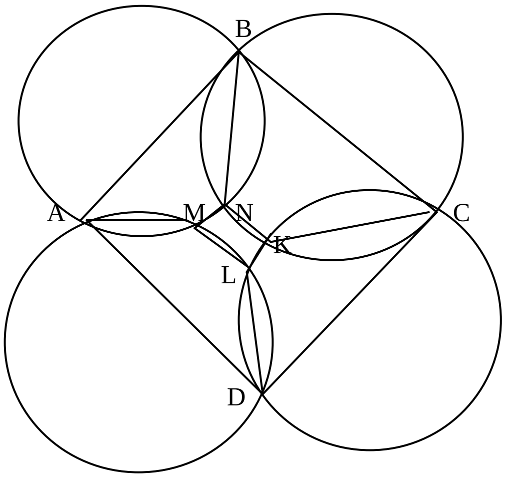
No pirmās vienādības seko, ka $p = -\frac{2}{3}q$.

No otrās vienādības seko, ka $q = 0$ vai $p = \frac{1}{4}$.

Pirmajā gadījumā iegūstam $p = q = 0$, otrajā – $p = \frac{1}{4}$, $q = -\frac{3}{8}$.

Pārbaude rāda, ka atrisinājumi der.

44.7. Skat. 44.4. zīm.



44.4. zīm.

Ievērojam, ka

$$\angle MNK + \angle MLK = 360° - (\angle BNM + \angle BNK) + 360° - (\angle DLM + \angle DLK) =$$
$$720° - (180° - \angle BAM + 180° - \angle BCK) - (180° - \angle DAM + 180° - \angle DCK) =$$
$$\angle BAM + \angle BCK + \angle DAM + \angle DCK = \angle BAD + \angle BCD .$$

Līdzīgi pierāda, ka

$\angle NML + \angle NKL = \angle ABC + \angle ADC$.

Tā kā ap četrstūri *ABCD* var apvilkt riņķa līniju, tad

$\angle ABC + \angle ADC = \angle BAD + \angle BCD = 180°$. No šejienes

$\angle NML + \angle NKL = \angle MNK + \angle MLK = 180°$, un ap četrstūri *MNKL* var apvilkt riņķa līniju.

44.8. Ja skaitli n var izsacīt kā divu veselu skaitļu kvadrātu summu, tad $n = x^2 + y^2$.
Tad $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2) = 2n$.
Ja skaitli $2n$ var izsacīt kā divu veidu skaitļu kvadrātu summu, tad $2n = x^2 + y^2$.
Redzams, ka x un y ir vienādas paritātes skaitļi. Iegūstam vienādību
$n = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$, kurā abās iekavās ierakstīti veseli skaitļi.

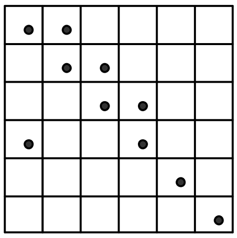
44.9. Pieņemsim pretējo, ka izliektu daudzskaldni var sagriezt n ieliektos četrstūros. Sauksim ieliekta četrstūra atvērtā leņķa (tā leņķa, kas lielāks par 180°) virsotni par īpašo punktu. Visi īpašie punkti atrodas daudzstūra iekšienē. Tad ir n atvērtie leņķi un n īpašie punkti. Ar katru īpašo punktu pilnais leņķis ir pilnībā nosegts ar ieliekto četrstūru leņķiem. Šo leņķu summa ir vienāda ar pilno leņķi, t.i., 360°. Tas nozīmē, ka *n* pilno leņķu nosegšanai vajag ieliekto četrstūru leņķus ar lielumu summu 360°·n, t.i., visus *n* ieliekto četrstūru leņķus.

Bet daži četrstūru leņķi ir vajadzīgi arī sākotnējā daudzstūra leņķu nosegšanai.

44.10 a) Aplūkojam *n* rindiņas, kurās ir visvairāk zvaigznīšu. Tajās kopā ir vismaz 2*n* zvaigznīšu. Tiešām, ja tā nebūtu, tad vismazāk aizpildītajā rindiņā būtu ne vairāk par 1 zvaigznīti. Tad arī atlikušajās rindiņās ir ne vairāk par 1 zvaigznīti. Tādā gadījumā kopējais zvaigznīšu skaits nepārsniedz $(2n-1)+n=3n-1$ zvaigznītes; iegūta pretruna.

Atzīmēsim šīs *n* rindiņas, un parējās zvaigznītes nosegsim ar kolonnām.

b) Jā, var (skat. 44.5. zīm.).



44.5. zīm.

44.11. Ir iespējami 3 gadījumi:

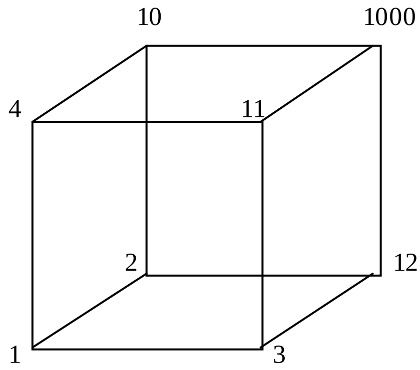
a) parabolas sakrīt. Tad plakne tiek sadalīta 2 daļās;

b) parabolas nekrustojas. Tad viena parabola sadala plakni 2 daļās. Otra parabola sadala vienu no šīm daļām 2 daļās. Kopā veidojas 3 daļas;

c) parabolas krustojas vienā punktā. Tad viena parabola sadala plakni 2 daļās. Otra parabola sadala katru no šim daļām 2 daļās. Veidojas 4 daļas.

Parabolas nevar krustoties vairāk nekā 1 punktā, jo tad vienādojumam $x^2+px+q=x^2+ax+b$ jeb $px+q=ax+b$ būtu vairāk par 1 atrisinājumu, bet tas ir iespējams tikai, ja $p=a$ un $q=b$, t.i., ja parabolas sakrīt.

44.12. a) Piemēram tā, kā parādīts zīmējumā.



44.6. zīm.

44.13. Pārveidojam vienādojumu formā

$$3^X + 3^y = (z-1)(z+1).$$

Tātad $3^x + 3^y$ ir divu viens otram sekojošu pāra skaitļu reizinājums, tātad dalās ar 8. Bet 3^x, dalot ar 8, dod tikai atlikumus1 un 3, un to summa nevar dalīties ar 8.

44.14. Pierādījums izmanto faktu, ka divas vienādas riņķa līnijas, krustojoties atšķeļ vienādus lokus**.**

44.15. Aplūkojam divas komandas, kas nav spēlējušas savā starpā. Apzīmē tās ar A_1 un A_2.

Ja ir kāda komanda, kas nav spēlējusi ne ar A_1, ne ar A_2, tad ir 3 komandas, kas nav spēlējušas savā starpā.

Atliek aplūkot gadījumu, ja šādas komandas nav. Bez A_1 un A_2 vēl ir 20 komandas. A_1 un A_2 katra ir spēlējusi 10 spēles, abas kopā – 20. Tādēļ šajā gadījumā katra no pārējām komandām ir spēlējusi tieši ar vienu no A_1 un A_2.

Apzīmēsim komandas, kas spēlējušas ar A_1, ar $A_3,\ldots, A_{12}$, komandas, kas spēlējušas ar A_2, ar $A_{13},\ldots,A_{22}$. Apskatām 2 gadījumus.

1. Starp $A_3,\ldots,A_{12}$ var atrast 2 komandas, kas nav spēlējušas savā starpā. Tad šīs 2 komandas un A_2 ir 3 komandas, kas nav spēlējušas savā starpā.
2. Tādu 2 komandu nav. Tad katra no komandām A_1, $A_3,\ldots, A_{12}$ ir spēlējusi ar katru citu no šīm komandām. Šo komandu ir 11. Tādēļ katra no tām ir nospēlējusi ar citām komandām no A_1, $A_3,\ldots$, A_{12} 10 spēles. Tas nozīmē, ka neviena no tām nav spēlējusi ar nevienu no pārējām komandām (A_2, A_{13}, $A_{14},\ldots, A_{22}$).

Aplūkojam komandas, kas spēlēja savā starpā pirmajā dienā. Katra no A_1, A_3,…, A_{12} nospēlēja 1 spēli ar kādu citu no šīm komandām. Taču tas nav iespējams, jo šo komandu ir nepāra skaits: 11. Tādēļ 2. gadījums nav iespējams.

44.16. No dotā seko, ka $x = -y + 2\pi n$ x .

Tad $\sin 1994x = \sin 1994(-y + 2\pi n) = \sin(-1994y) = -\sin 1994y$

44.17. Vispirms atzīmēsim sekojošu faktu: ja trijstūra virsotnes atrodas rūtiņu lapas virsotnēs, tad šī trijstūra laukums ir $\frac{n}{2}$, kur n – naturāls skaitlis.

Katru piecstūri var pa diagonālēm sagriezt 3 trijstūros, katram no tiem laukums būs $\frac{n}{2}$, t.i., vismaz $\frac{1}{2}$. Tādēļ visa piecstūra laukums būs vismaz $\frac{3}{2}$.

b) Ja varētu pierādīt, ka piecstūra iekšpusē atrodas kāda rūtiņu virsotne, tad, savienojot to ar piecstūra virsotnēm, piecstūris tiktu sadalīts 5 trijstūros. Katram no tiem laukums ir vismaz $\frac{1}{2}$. Tādēļ piecstūra laukums ir vismaz $\frac{5}{2}$.

Pierādām, ka piecstūra iekšienē noteikti ir vismaz 1 rūtiņu virsotne. Šo virsotni atrod kā ceturto paralelograma virsotni, kuram 3 virsotnes ir sekojošas piecstūra virsotnes.

44.18. No vienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko, ka
$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.
Tā kā $a + b + c = abc$, tad
$abc \geq 3\sqrt[3]{abc}$; no šejienes iegūstam $abc \geq 3\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$.
Tādēļ vismaz viens no a, b, c ir lielāks vai vienāds par $\sqrt{3}$. Bet $\sqrt{3} = 1{,}73\cdots > 1{,}7$.

44.19. Vienīgais atrisinājums ir $n = m = 1$.Pierādām, ka citu atrisinājumu nav.
Ja $2 \leq n \leq 8$, tad var pārbaudīt, ka $1!+\ldots+n!$ nav naturāla skaitļa kubs.
Ja $n \geq 9$, tad $1!+2!+\ldots+n! = (1!+2!+\ldots+8!)+(9!+\ldots+m!)$.
$9!+\ldots+n!$ dalās ar 27, jo katrs no saskaitāmajiem satur reizinātājus 3 un 9 un tādēļ dalās ar 27. Ievērosim, ka $1!+2!+\ldots+8! = 46233$.
Šis skaitlis dalās ar 3, bet nedalās ar 27. Tādēļ $(1!+\ldots+8!)+(9!+\ldots+n!)$ dalās ar 3, bet nedalās ar 27. Tāpēc skaitlis $(1!+\ldots+8!)+(9!+\ldots+n!)$ nevar būt naturāla skaitļa kubs.

44.20. Atrodam divus cilvēkus, kas viens otru pazīst. Apzīmē viņus ar A un B.
A pazīst 1600 cilvēkus: B un vēl 1599 cilvēkus no pārējiem 1992. Līdzīgi, B pazīst 1599 no pārējiem 1992 cilvēkiem. Kopā A un B ir $2\cdot 1599 = 3198$ pazīšanās ar citiem.

Ievērojam, ka 3198 >1992. Tādēļ dažus no pārējiem 1992 cilvēkiem pazīst gan *A*, gan *B*. Apzīmē ar *C* kādu cilvēku, ko pazīst gan *A*, gan *B*.

A pazīst 1600 cilvēkus: *B*, *C* un vēl 1598 no pārējiem 1991 cilvēkiem. Līdzīgi, *B* un *C* pazīst 1598 no pārējiem 1991 cilvēkiem. Kopā *A*, *B* un *C* pazīst 3·1598 = 4794 cilvēkus. Tā kā $4794 > 2 \cdot 1991$, dažus no pārējiem 1991 cilvēkiem pazīst visi trīs: gan *A*, gan *B*, gan *C*. Izvēlamies vienu cilvēku, ko pazīst gan *A*, gan *B*, gan *C*, apzīmē viņu ar *D*.

Līdzīgi pierāda, ka var izvēlēties cilvēkus *E*, ko pazīst gan *A*, gan *B*, gan *C*, gan *D*, un cilvēku *F*, ko pazīst gan *A*, gan *B*, gan *C*, gan *D*, gan *E*. Prasītais pierādīts.

44.21. Pārveidojam vienādojumu formā

$$(x-y)(3x+3y+1)=y^2 .$$

Viegli pierādīt, ka $(x-y)$ un $(3x+3y+1)$ ir savstarpēji pirmskaitļi.

Tāpēc $(x-y)$ un $(3x+3y+1)$ ir pilni kvadrāti.

Pārveidojot vienādojumu formā

$$(x-y)(4x+4y+1)=x^2 ,$$

iegūstam, ka $(4x+4y+1)$ arī ir naturāla skaitļa kvadrāts.

44.22. Apskatām skaitļu pārus (1,2), (1,3), (1,12), (3,4). Tiem izpildās vienādības

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 12}+\frac{1}{3\cdot 4}=1 \text{ un}$$

$$(1+1+1+3)+(2+3+12+4)=27 .$$

Tātad ir 2^2 pāri ar summu 3^3.

Aizstājam pāri (a,b) ar diviem: $(a,a+b)$ un $(b,a+b)$. Tad

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)}=\frac{b+a}{ab(b+a)}=\frac{1}{ab} \text{ un}$$

$$a+(a+b)+b+(a+b)=3(a+b),$$

t.i. apgriezto lielumu summa nemainās, bet skaitļu summa palielinās 3 reizes. Šādā veidā no 2^2 pāriem ar summu 3^3 var iegūt 2^3 pārus ar summu 3^4, pēc tam – 2^4 pārus ar summu 3^5, utt.

Var pierādīt, ka vienādi pāri var rasties tikai no vienādiem. Tādēļ visi iegūtie pāri būs dažādi.

44.23.

a) Izvēlamies kādu taisni un ortogonāli projicējam visus nogriežņus uz šo taisni. Lai nogriežņu sistēma būtu nosedzoša, nepieciešams, lai nogriežņu projekcijas nosegtu nogriezni ar garumu 2.

Izvēlamies vienu taisni, nosaucam to par asi. Ar $P(\alpha)$ apzīmējam nogriežņu projekciju uz taisni, kas veido leņķi α ar asi, kopējo garumu. Jebkuram α jābūt $P(\alpha) \geq 2$. Tāpēc, ja nogriežņu sistēma ir nosedzoša, tad

$$\int_0^\pi P(\alpha)d\alpha \geq 2 \cdot \pi = 2\pi.$$

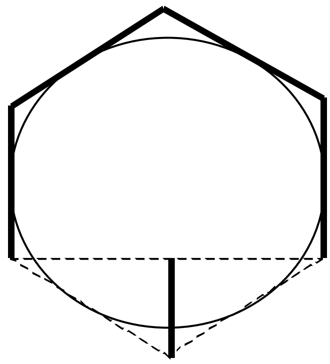
Ar ℓ_i apzīmējam i-tā nogriežņa garumu. Ar $P_i(\alpha)$ apzīmējam i-tā nogriežņa projekcijas garumu uz taisnes, kas veido leņķi α ar asi. Tad

$$2\pi \leq \int_0^\pi P(\alpha)d\alpha = \int_0^\pi P_1(\alpha)d\alpha + \int_0^\pi P_2(\alpha)d\alpha + \cdots + \int_0^\pi P_n(\alpha)d\alpha$$. Bet

$$\int_0^\pi P_i(\alpha)d\alpha = \int_0^\pi |\ell_i \cos\alpha| d\alpha = 2\ell_i .$$

Tādēļ $\ell_1 + \ell_2 + \cdots \ell_n \geq \pi > 3$.

b) Jā, eksistē (skat. 44.7. zīm.).



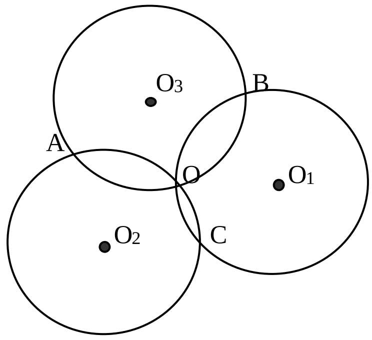
44.7. zīm.

Tumšo nogriežņu sistēmas kopējais garums ir $4\frac{1}{2} < 5$, un tie veido nosedzošu sistēmu.

44.24. Vispirms, uzzīmējot atbilstošu shēmu parāda, ka 1. spēlētājs sākot ar jebkuru no skaitļiem 1, 2, 3, … , 8, var panākt, lai virknē būtu trijnieks.

Tālāk, uzzīmējot atbilstošas shēmas, parāda, kā 1. spēlētājs, sākot ar skaitļiem $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$, $4k+4$, ($k \geq 2$), var nonākt pie mazāka skaitļa. Izmantojot matemātisko indukciju, no šejienes seko uzdevuma apgalvojums.

44.25. *Lemma* 1. Ja riņķa līniju centrus apzīmē ar O_1, O_2, O_3,
tad $\Delta O_1O_2O_3 = \Delta ABC$ (skat.44.8.zīm.) .



44.8. zīm.

Tā kā AO_3OO_2 ir rombs, tad $AO_2 = O_3O$ un $AO_2 \parallel O_3O$. Līdzīgi $BO_1 = O_3O$ un $BO_1 \parallel O_3O$. Tāpēc $AO_2 = BO_1$ un $AO_2 \parallel BO_1$; no šejienes ABO_1O_2 -- paralelograms, un AB ir paralēls un vienāds ar O_2O_1. Līdzīgi pierāda, ka AC ir paralēls un vienāds ar O_3O_1 un BC ir vienāds un paralēls ar O_3O_2.

Lemma 2. Ja r ir kaut kāda trijstūra ievilktās riņķa līnijas rādiuss, bet R – apvilktās riņķa līnijas rādiuss, tad $R \geq 2r$.

Apskatām trijstūri, ko veido malu viduspunkti. Tas ir līdzīgs sākotnējam trijstūrim ar līdzības koeficientu $\frac{1}{2}$. Tādēļ tā apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir $\frac{R}{2}$. Ievilktā riņķa līnija ir mazākā no tām riņķa līnijām, kam ar katru malu ir kopējs punkts. Tādēļ $\frac{R}{2} \geq r$. Lemma pierādīta.

Var ievērot, ka trijstūris Δ ir līdzīgs trijstūrim $\Delta O_1O_2O_3$. To atbilstošās malas ir paralēlas. Tādēļ šo trijstūru laukumu attiecību var gūt kā to ievilkto riņķu rādiusu kvadrātu attiecību. Apzīmējam trijstūrī $O_1O_2O_3$ ievilktās un apvilktās riņķa līnijas rādiusus ar r un R

Trijstūra Δ ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir r+R. Tāpēc laukumu attiecība ir

$$\left(\frac{R+r}{r}\right)^2 \geq \left(\frac{3r}{r}\right) = 9.$$