Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 44. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

9. klase

44.1. Dota kvadrātfunkcija $y = x^2 + px + q$, kur p un q ir pāra skaitļi. Zināms, ka visiem veseliem x pastāv nevienādība $y \geq 0$.
Pierādīt, ka nevienādība $y \geq 0$ pastāv visiem x (ne tikai veseliem).

44.2. Uz izliekta četrstūra *ABCD* malām *AB*, *BC*, *CD*, *DA* ņemti atbilstoši punkti *M*, *N*, *K*, *L*. Riņķa līnijas, kas apvilktas ap trijstūriem *AML*, *BNM*, *CNK*, krustojas punktā *O* četrstūra iekšpusē.
Pierādīt, ka punkti *D*, *L*, *K*, *O* atrodas uz vienas riņķa līnijas.

44.3. Pierādīt, ka visiem naturāliem n skaitlis n^5-n dalās ar 30. Kādiem naturāliem n skaitlis n^5-n dalās ar 120 ?

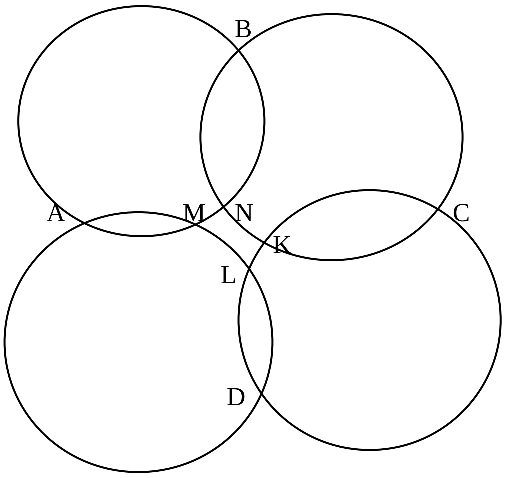
44.4. Pierādīt, ka katru daudzstūri var sagriezt platleņķa trijstūros.

44.5. Sešos grozos atrodas attiecīgi 31, 32, 33, 34, 35, 36 konfektes. Ar vienu gājienu atļauts no pieciem groziem paņemt pa vienai konfektei un ielikt tās sestajā. Vai var panākt, lai visas konfektes vienlaikus atrastos vienā vai divos grozos ?

10.klase

44.6. Vienādojuma $x^2 + px + q = 0$ saknes ir $2p$ un $2q$. Atrast p un q.

44.7. Četras riņķa līnijas krustojas, kā parādīts 44.1. zīmējumā.



44.1. zīm.

Zināms, ka ap četrstūri *ABCD* var apvilkt riņķa līniju. Pierādīt, ka arī ap četrstūri *MNKL* var apvilkt riņķa līniju.

44.8. Pierādīt, ka skaitli $2n$ var izsacīt kā divu veselu skaitļu kvadrātu summu tad un tikai tad, kad skaitli n var izsacīt kā divu veselu skaitļu kvadrātu summu (n - patvaļīgs naturāls skaitlis).

44.9. Pierādīt, ka nevienu izliektu daudzstūri nevar sagriezt gabalos tā, lai visi gabali būtu ieliekti četrstūri.

44.10. Tabula sastāv no $2n \times 2n$ rūtiņām. Tieši $3n$ rūtiņās ierakstīts pa vienai zvaigznītei.

Pierādīt, ka var nokrāsot melnā krāsā n kolonnas un n rindiņas tā, lai visas zvaigznītes būtu aizkrāsotas. Vai iespējams izvietot 6×6 rūtiņu tabulā 10 zvaigznītes tā, lai tās visas nevarētu aizkrāsot, nokrāsojot 3 rindiņas un 3 kolonnas ?

11.klase

44.11. Koordinātu plaknē uzzīmēti funkciju $y = x^2 + px + q$ un $y = x^2 + ax + b$ grafiki. Cik daļās var tikt sadalīta koordinātu plakne ?

44.12. Divas kuba virsotnes sauc par blakus virsotnēm, ja tās savieno šķautne.

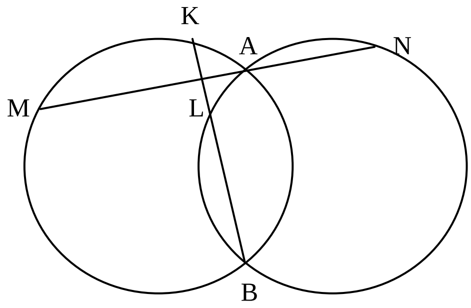
a) Parādīt, ka kuba virsotnēs var ierakstīt pa naturālam skaitlim tā, lai 7 virsotnēs ierakstītie skaitļi katrs būtu mazāks par savu triju kaimiņu vidējo aritmētisko.

b) Vai var panākt, lai šī īpašība izpildītos visās 8 virsotnēs ierakstītajiem skaitļiem ?

44.13. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$3^x + 3^y = z^2 .$$

44.14. Divas vienādas riņķa līnijas krustojas punktos *A* un *B*. Taisne *MN* iet caur punktu *A*. Taisne, kas iet caur *B* perpendikulāri *MN*, krusto riņķa līnijas punktos *K* un *L* (skat. 44.2. zīm.).



44.2. zīm.

Pierādīt, ka *MKNL* ir rombs.

44.15. Turnīrā piedalās 22 komandas. Līdz pārtraukumam turnīrā izspēlētas 10 kārtas. Katrā kārtā komandas sadalījās 11 pāros, un viena pāra komandas spēlēja savā starpā. Nekādas divas komandas nespēlēja savā starpā vairāk par vienu reizi.
Pierādīt, ka var atrast 3 komandas, kas savā starpā vēl nav spēlējušas nevienu spēli.

12. klase

44.16. Dots, ka $\cos x = \cos y$ un $\sin x = -\sin y$.
Pierādīt, ka $\sin 1994x + \sin 1994y = 0$.

44.17. Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa; kvadrāta malas garums ir 1. Uzzīmēts piecstūris, kura visas virsotnes atrodas rūtiņu virsotnēs. Pierādīt:
a) ka tā laukums ir vismaz 3/2;
b) ja piecstūris ir izliekts, tad tā laukums ir vismaz 5/2.

44.18. Dots, ka *a*, *b*, *c* ir pozitīvi skaitļi un $a + b + c = abc$.
Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem *a*, *b*, *c* ir lielāks par 1,7.

44.19. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$1!+2!+3!+\cdots+n!=m!\,1.$$

44.20. Iestādē strādā 1994 cilvēki. Katram no viņiem šajā iestādē ir 1600 paziņu. Pierādīt, ka var atrast tādus sešus šīs iestādes darbiniekus, kas visi cits citu pazīst.

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

44.21. Dots, ka x un y ir naturāli skaitļi un

$$3x^2 + x = 4y^2 + y.$$

Pierādīt, ka $x - y$, $3x + 3y + 1$ un $4x + 4y + 1$ ir naturālu skaitļu kvadrāti.

44.22. Vai var atrast tādus 2^{1994} dažādus naturālu skaitļu pārus (a_i, b_i) ka vienlaikus izpildās šādas prasības:

1) $\dfrac{1}{a_1b_1} + \dfrac{1}{a_2b_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_{2^{1994}}b_{2^{1994}}} = 1$;

2) $\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{1994}}\right) + \left(b_1 + b_2 + \cdots + b_{2^{1994}}\right) = 3^{1995}$.

44.23. Plaknē dots riņķis ar rādiusu 1. Sauksim nogriežņu sistēmu par nosedzošu, ja katrai taisnei, kam ir kopīgs punkts ar riņķi, ir kopīgs punkts arī ar kādu sistēmas nogriezni.

a) Pierādīt, ka nosedzošas sistēmas nogriežņu garumu summa ir lielāka par 3.

b) Vai eksistē tāda nosedzoša sistēma, kuras nogriežņu garumu summa mazāka par 5?

44.24. Uz tāfeles uzrakstīts naturāls skaitlis a. Divi spēlētāji izdara gājienus pēc kārtas. Pirmais spēlētājs ar savu gājienu nodzēš uz tāfeles esošo skaitli un vietā uzraksta tā dalījumu ar 2, dalījumu ar 4 vai reizinājumu ar 3 (kādu no dalījumiem drīkst rakstīt tikai tad, ja tas ir naturāls skaitlis). Otrais spēlētājs ar savu gājienu nodzēš uz tāfeles esošo skaitli un tā vietā uzraksta par 1 lielāku vai par 1 mazāku skaitli. Pirmais spēlētājs grib panākt, lai uz tāfeles kādreiz parādītos skaitlis 3 (viņam vienalga, kurš to uzraksta).

Vai pirmais spēlētājs noteikti var sasniegt savu mērķi, pat ja otrais cenšas viņam traucēt?

44.25. Trīs vienādas riņķa līnijas krustojas vienā punktā 0. To otrie krustpunkti (pa divām) ir *A*, *B*, *C*. Ar Δ apzīmējam trijstūri, kura malas katra pieskaras divām riņķa līnijām un kura iekšpusē atrodas visas trīs riņķa līnijas.

Pierādīt, ka Δ laukums ir vismaz 9 reizes lielāks par trijstūra *ABC* laukumu.