Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 45. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

45.1. Dotās nevienādības $x^3>2$ abas puses ir pozitīvas. Tāpēc, ceļot to pakāpē ar naturālu kāpinātāju, atkal iegūst patiesas nevienādības.

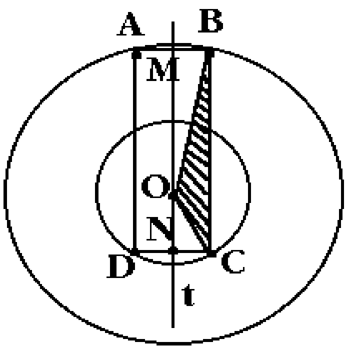
a) ceļot $x^3>2$ kvadrātā, iegūst $x^6>4$

b) pieņemsim no pretējā, ka $x^7\leq 5$. Tad ($x>0$), ceļot šo nevienādību kubā, iegūst $x^{21}\leq 125$. Bet, ceļot sākumā doto nevienādību septītajā pakāpē, iegūst $x^{21}>128$. Tā ir pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs, un $x^7>5$.

45.2. Ievērosim, ka $1995 = 3\cdot 5\cdot 7\cdot 19$, kur 3; 5; 7; 19 - dažādi pirmskaitļi.

Pieņemsim no pretējā, ka $x\cdot y$ dalās ar 1995. Tad $x\cdot y$ dalās ar 3, tāpēc vai nu x, vai y dalās ar 3. Tā kā $x + y = 1995$, tad arī otrs no saskaitāmajiem x un y dalās ar 3. Līdzīgi pierāda, ka gan x, gan y dalās ar 5; 7; 19. Tātad gan x, gan y dalās ar $3\cdot 5\cdot 7\cdot 19=1995$. Tātad $x\geq 1995$ un $y\geq 1995$ un $x+y\geq 2\cdot 1995$. Tā ir pretruna ar nosacījumu $x+y = 1995$.

45.3. Novelkam caur kopīgo centru O taisni t, kas paralēla AD un BC un krusto malas AB un CD attiecīgi punktos M un N. Tā kā $t\perp CD$, tad M un N ir attiecīgi AB un CD viduspunkti.



45.3. zim.

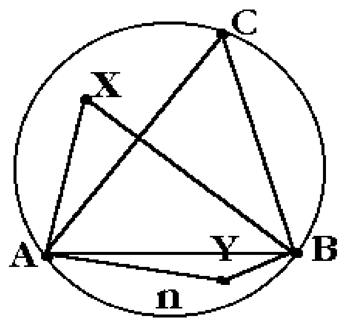
Figūras F laukumu apzīmēsim ar $[F]$.

Iegūstam [*ABCD*] = 2[*CNMB*] = 4[*COB*]. Bet $[COB] \leq \frac{1}{2} OC \cdot OB = \frac{1}{2} R \cdot r$; maksimālais [*COB*] ir tad, kad $CO \perp BO$, un šādā gadījumā $[COB] = \frac{1}{2} R \cdot r$, bet $[ABCD] = 2R \cdot r$. Skaidrs, ka tad

$$BC = \sqrt{R^2 + r^2}, \text{ bet } AB = \frac{[ABCD]}{BC} = \frac{2R \cdot r}{\sqrt{R^2 + r^2}}.$$

Vēl jāpaskaidro, ka situācija, kad $CO \perp BO$, ir iespējama.

45.4. Aplūkosim visus attālumus starp pa pāriem ņemtiem dotajiem punktiem un atradīsim starp tiem vismazāko. Pieņemsim, ka tas ir starp punktiem *A* un *B*. No visiem pārējiem dotajiem punktiem atradīsim to, no kura nogriezni *AB* redz vislielākajā leņķī; pieņemsim, ka tas ir *C*.



45.4. zīm.

Mēs apgalvojam, ka punktus *A*, *B*, *C* var ņemt par meklētajiem. Tiešām, saskaņā ar punktu *A* un *B* izvēli $AB \leq AC$ un $AB \leq BC$; tā kā pret garāko malu atrodas lielākais leņķis, tad $\angle ACB$ nav lielāks ne par vienu no abiem pārējiem, tātad $\angle ACB \leq 60^0$ un tāpēc $\cup AnB \leq 120^0 < \cup ACB$. Ja novilktās riņķa līnijas iekšpusē būtu kāds dotais punkts *X* "virs" taisnes *AB*, tad $\angle AXB > \angle ACB$ – pretruna; ja novilktās riņķa līnijas iekšpusē būtu kāds dotais punkts *Y* "zem" taisnes *AB*, tad $\angle AYB > \frac{1}{2} \cup ACB > \frac{1}{2} \cup AnB = \angle ACB$ -- pretruna.

45.5. Ja ir tāds pulciņš, kuru apmeklē visi skolēni, viss kārtībā. Pieņemsim, ka tāda pulciņa nav. Izvēlamies vienu skolēnu α; pieņemsim, ka tas apmeklē pulciņus *A* un *B*. Jābūt kādam skolēnam β, kura pulciņu pāris nav (*A*,*B*); tā kā α un β jābūt kopīgam pulciņam, varam pieņemt, ka β apmeklē pulciņus *A* un *C*. Ir jābūt skolēnam γ, kas neapmeklē pulciņu *A* (citādi visi apmeklētu pulciņu *A*, bet tā būtu pretruna ar pasvītroto pieņēmumu); tā kā γ jābūt kopīgam pulciņam gan ar α, gan ar β, tad γ apmeklē (*B*,*C*).

Mēs apgalvojam, ka citu pulciņu nav. Tiesām, ja kāds apmeklētu pulciņu *D* un vēl kādu pulciņu *X*, tad pārim (*D*,*X*) nevar būt kopīgs pulciņš ar pāriem (*A*,*B*), (*A*,*C*) un (*B*,*C*) vienlaicīgi.

Tāpēc katrs skolēns apmeklē divus no trim pulciņiem *A*, *B*, *C*. Pieņemsim, ka skolēnu ir *n* un katrs uzraksta uz atsevišķām zīmītēm savu pulciņu nosaukumus; kopā ir $n \cdot 2$ zīmītes, kas sadalās pa 3 pulciņiem. Tāpēc vismaz viena pulciņa nosaukums uzrakstīts uz ne mazāk kā $\frac{1}{3} \cdot 2n = \frac{2}{3} n$ zīmītēm. Šis pulciņš arī ir meklējamais.

45.6. Izdarām pārveidojumus, apzīmējot doto izteiksmi ar S:

$$S = (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta) = [\alpha\beta-(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2]\cdot[\alpha\beta-(\alpha+\beta)\delta+\delta^2]$$

Saskaņā ar Vjeta teorēmu $\alpha+\beta = -p$ un $\alpha\cdot\beta = 1$. Tāpēc

$$S = [1-(-p)\cdot\gamma+\gamma^2]\cdot[1-(-p)\delta+\delta^2] = [\gamma^2+p\cdot\gamma+1]\cdot[\delta^2+p\delta+1]$$

Tālāk summas pārveido, pieskaitot un atņemot vienu un to pašu lielumu, tādējādi

$$S = [\gamma^2+q\cdot\gamma+1+p\cdot\gamma-q\cdot\gamma]\cdot[\delta^2+q\delta+1+p\delta-q\delta]$$

Tā kā γ un δ ir vienādojuma $x^2+qx+1=0$ saknes, tad

$$\gamma^2+q\gamma+1=\delta^2+q\delta+1=0.$$

Tāpēc, aizstājot izteiksmē S attiecīgās summas ar 0, iegūst

$$S = [0+\gamma(p-q)]\cdot[0+\delta(p-q)] = \gamma\cdot\delta\cdot(q-p)^2.$$

Saskaņā ar Vjeta teorēmu $\gamma\cdot\delta=1$. Tāpēc $S = (q-p)^2$.

45.7. Saskaņā ar doto, katrs no skaitļiem *a*; *b*; *c*; *d*, dalot ar 5, dod vienu no reducētajiem atlikumiem 1; 2; -1; -2 (atlikumu 3 aizstājam ar -2, atlikumu 4 aizstājam ar -1). Pašu skaitļu kombinācijas vietā varam apskatīt reducēto atlikumu kombināciju. Tā kā (-1) var brīvi pārvērst par 1 (mainot zīmi) un (-2) – par 2, tad varam uzskatīt, ka katrs no skaitļiem *a*; *b*; *c*; *d* aizstāts ar 1 vai 2. Tālāk aplūkojam 5 iespējas:

a) visi 4 skaitļi aizstāti ar 1; veidojam +1-1+1-1=0,

b) ir 3 vieninieki un 1 divnieks, veidojam +1+1+1+2=5,

c) ir 2 vieninieki un 2 divnieki; veidojam +1-1+2-2=0,

d) ir 1 vieninieks un 3 divnieki; veidojam -1+2+2+2=5,

e) ir 4 divnieki; veidojam +2-2+2-2=0.

Visi gadījumi aplūkoti, uzdevums atrisināts.

45.8. Savienojam riņķa centru ar visām daudzstūra virsotnēm; katrā iegūtajā trijstūrī novelkam augstumu no centra *O* pret daudzstūra malu. Skaidrs, ka šī augstuma garums nav mazāks par *R*. Tāpēc katra trijstūra laukums nav mazāks par $\frac{1}{2}a_i \cdot R$.

Saskaitot visus šos laukumus, iegūstam

$L \geq \frac{1}{2}a_1R + \frac{1}{2}a_2R + \ldots + \frac{1}{2}a_nR$, $L \geq \frac{1}{2}(a_1 + \ldots + a_n) \cdot R$, $L \geq \frac{1}{2}PR$,

no kurienes $R \geq \frac{2L}{P}$.

45.9. Pieņemsim, ka vienīgais turnīra laureāts ir *A*. No pretējā pieņemsim, ka *A* zaudējis kādiem spēlētājiem; apzīmēsim tos ar B_1, $B_2, \ldots, B_k$. Izvēlēsimies to no spēlētājiem B_1, $B_2, \ldots, B_k$, kas savstarpējās spēlēs guvis visvairāk uzvaru; apzīmēsim to ar *B*. Mēs apgalvojam, ka *B* arī ir laureāts.

Tiešām, visi spēlētāji iedalās 3 grupās:

1) *A*.

2) Spēlētāji, kurus *A* uzvarējis , (šīs grupas spēlētājus *B* ir apspēlējis "caur" *A*).

3) Spēlētāji, kam *A* zaudējis $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$.

Lai pierādītu, ka *B* arī ir laureāts, jāpierāda: ja *B* zaudējis kādam B_i , tad eksistē tāds B_j, ka $B \to B_j \to B_i$. Pieņemot pretējo, ka tāda B_j nav, iegūstam, ka visus tos B_j, kurus uzvarējis *B*, uzvarējis arī B_i. Tā kā B_i uzvarējis arī pret *B*, tad spēlētājam B_i grupas $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ "iekšējā turnīrā" ir vairāk uzvaru nekā *B*; tā ir pretruna ar *B* izvēli. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs, un *A* nevienam nav zaudējis.

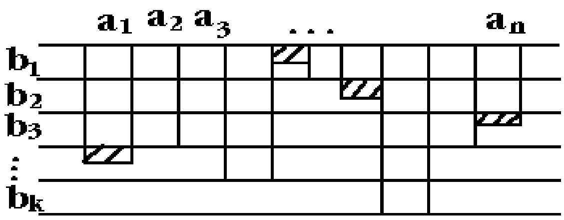
45.10. Pavisam šo virknīšu ir 2^n. Skaidrs: ja $n = 1$,tad varam izvēlēties tikai vienu no tām. Turpmāk aplūkojam gadījumu, kad $n \geq 2$.

Sadalām katru virknīti divās daļās: pirmajā ciparā un "astē", kas sastāv no (n-1) cipariem. Dažādu astu pavisam ir 2^{n-1}. Ja izvēlēsimies vairāk par 2^{n-1} virknītēm, tad divām no tām būs vienādas astes; tāpēc tās atšķirsies tikai ar vienu - pirmo - ciparu. Tā nedrīkst būt. Tātad vairāk par 2^{n-1} virknītēm izvēlēties nevar.

Parādīsim, kā var izvēlēties 2^{n-1} virknes. Izvēlēsimies visas virknes, kas satur pāra skaitu vieninieku. Viegli pierādīt, ka tādas virknes sastāda tieši pusi no visu virkņu skaita un, ka jebkuras divas no tām atšķiras vismaz divās pozīcijās.

45.11. Piemēram, tāds ir skaitlis $2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$.

45.12. Attēlosim skaitļus uz kartītēm (a_1, $a_2, \ldots, a_n$) ar taisnstūriem; katrs taisnstūris sastāv no zināma skaita veselu kvadrātiņu (skaitļa a_i veselā daļa) un vēl varbūt kāda iesvītrotā taisnstūra (skaitļa a_i daļveida daļa), skat. 45.5.zīm.



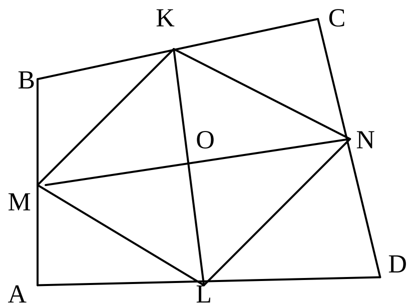
45.5. zīm.

Acīmredzot, a_i ir i-tās kolonnas laukums, bet b_j ir vienības kvadrātiņu skaits j-jā joslā. Tāpēc $a_1+\ldots+a_n \geq b_1+b_2+\ldots+b_k$, un vienādība pastāv tad un tikai tad, kad iesvītroto daļu nav, t.i., kad visi uz kartiņām uzrakstītie skaitļi ir naturāli.

45.13. Pierāda divus apgalvojumus:

1) Katrs no novilktajiem nogriežņiem sadalās 4 vienādās daļās.

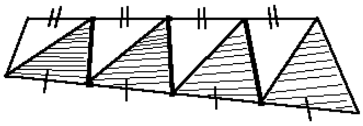
Aplūkosim 45.6. zīmējumu. Tā kā $MK \| AC \| LN$ un $KN \| BD \| ML$, tad $MKNL$ ir paralelograms. Tāpēc MN un KL krustpunktā dalās uz pusēm.



45.6. zīm.

Atkārtoti pielietojot šo faktu, iegūstam prasīto.

2) Katrā "rūtiņu" rindā laukumi veido aritmētisko progresiju; tas pats ir arī katrā "rūtiņu kolonnā" (skat 45.7. zīm.).



45.7. zīm.

Iesvītroto trijstūru laukumi veido aritmētisko progresiju, jo pamati ir vienādi, bet augstumi veido aritmētisku progresiju. Tāpat arī neiesvītroto trijstūru laukumi veido aritmētisku progresiju. Saskaitot divas aritmētiskas progresijas, iegūst aritmētisku progresiju.

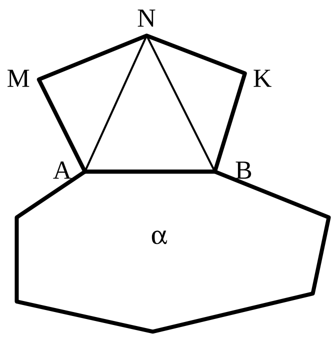
Izmantojot otro apgalvojumu, pierāda prasīto.

45.14. Ievērojam, ka

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_5x_5 = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_5x_5)(x_1 + x_2 + \cdots + x_5) =$$
$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots a_5x_5^2 + (a_1 + a_2)x_1x_2 + (a_1 + a_3)x_1x_3 + \cdots (a_4 + a_5)x_4x_5 \geq$$
$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots a_5x_5^2$$

Saskaņā ar doto, ka $a_i + a_j \geq 0$ un $x_i \geq 0$.

45.15. Vispirms parādīsim, ka prasītais ir izdarāms, ja n dalās ar 3. Lietosim matemātisko indukciju:



45.8. zīm.

Pie $n = 3$ jāzīmē tikai trijstūra kontūra,

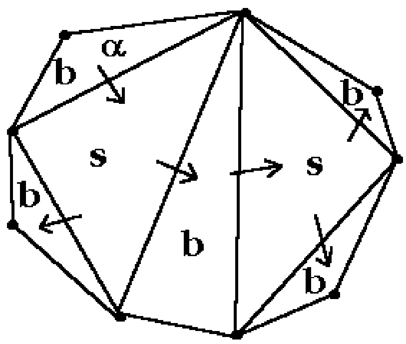
Pieņemsim, ka pie $n = 3k$ ir uzzīmēta prasītā slēgtā lauztā līnija *w*, kas sadala
n-stūri α un sākas un beidzas virsotnē *A*.

Skaidrs, ka līnija *NMAwANBKN* sadala prasītajā veidā (*n*+3)-stūri $\alpha \cup AMNKB$. (45.8.zīm.)

Tātad pie *n* =1995 uzdevuma prasības ir izpildāmas.

Tagad pierādīsim, ka citiem *n* prasītais nav izpildāms. Tādējādi tas nebūtu izdarāms arī pie *n* =1994.

Pieņemsim, ka prasītā slēgtā līnija novilkta. Uz brīdi pieņemsim, ka esam pierādījuši: iegūtos plaknes apgabalus (trijstūrus un bezgalīgo ārējo apgabalu) var katru nokrāsot baltu vai sarkanu tā, ka diviem vienādi nokrāsotiem apgabaliem nav kopīgas malas. Tad katrs nogrieznis ir viena balta un viena sarkana apgabala mala, tāpēc visu sarkano apgabalu malu kopskaits vienāds ar visu balto apgabalu malu kopskaitu. Bet visi apgabali, izņemot ārējo, ir ar 3 malām, turpretī ārējam apgabalam ir *n* malas. Iegūstam, ka *n* jādalās ar 3.



45.9. zīm

Atliek pierādīt mūsu apgalvojumu par krāsojuma iespējamību.

Iegūtajā triangulācijā eksistē trijstūris, kuram ir divas daudzstūra malas (zīmējumā tas ir α); ja tāda nebūtu, tad daudzstūra malu skaits nepārsniegtu $n-2$, un tā ir pretruna.

Nokrāsosim šo trijstūri baltu, tam kaimiņos esošos – sarkanus , tiem kaimiņos esošos – baltus, utt. Skaidrs, ka šādā ceļā katriem diviem blakus esošiem trijstūriem ir dažādas krāsas (kaimiņos jeb blakus esošie trijstūri ir trijstūri ar kopīgu malu), jo katra diagonāle pārdala daudzstūri divās daļās, kurām citu kopīgu nogriežņu bez šīs diagonāles nav.

Lai krāsojums būtu pabeigts, jāpamato, ka visi "uz ārpusi" izejošie trijstūri būs vienā krāsā (tad ārējo apgabalu varēs nokrāsot pretējā krāsā).

Pieņemsim, ka eksistē divi "uz ārpusi" izejoši trijstūri pretējās krāsās. Tad eksistē arī divi šādi trijstūri ar kopēju virsotni. Tā kā starp trijstūriem krāsojuma pretrunu nav, tad šajā virsotnē starp tiem ir vēl pāra skaits citu trijstūru (lai varētu realizēties ķēdīte *bsbs*…*bsbs* trijstūru krāsām ap doto virsotni).

Tas nozīmē, ka no šīs virsotnes pavisam iziet nepāra skaits nogriežņu. Bet tā nav taisnība: visi nogriežņi ir uzzīmēti, novelkot slēgtu lauztu līniju, kas katrā virsotnē tik pat reižu ieiet, cik no tās iziet; tāpēc katrā virsotnē "satiekas" pāra skaits nogriežņu. Iegūtā pretruna parāda, ka varēs nokrāsot arī ārējo apgabalu un pabeigt krāsojumu.

45.16. Vienādojumu varam pārveidot par

$$4\sin x\cos x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}$$

jeb $(2\sin x\cdot\cos x)^2=1$, jeb $\sin 2x=\mp 1$. Tad

$2x=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot n,\quad x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot n,\quad n\in Z.$

Visas vērtības pieder definīcijas apgabalam, tātad der par saknēm.

45.17. Vispirms pierādīsim sekojošas formulas:

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad (1)$$

un $$1^5 + 2^5 + ... + n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} \qquad (2)$$

(1) pierādīsim ar matemātisko indukciju.

Bāze, ja $n=1$: Tiešām $1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = 1$.

Induktīvā pāreja: Pieņemsim, ka vienādība (1) izpildās, ja $n = k$, $k \in Z$:

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2; \qquad (*)$$

jāpierāda, ka vienādība izpildās arī, ja $n = k+1$:

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 \quad (**).$$

Pēdējās vienādības (∗∗) kreisās puses pirmos k saskaitāmos aizvietosim ar vienādības (∗) labo pusi. Izdarot sekojošus pārveidojumus, iegūstam:

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 =$$

$$= (k+1)^2\left(\left[\frac{k}{2}\right]^2 + (k+1)\right) = (k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right) = (k+1)^2\left(\frac{k+2}{2}\right)^2 =$$

$$= \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$ jeb tiešām izpildās vienādība (∗∗) un (1).

Izmantojot matemātisko indukciju, pierādīsim arī (2).

Bāze, ja n=1: Patiešām, $1^5 = \frac{1^2(1+1)^2(2\cdot 1^2 + 2\cdot 1 - 1)}{12} = \frac{4\cdot 3}{12} = 1$.

Induktīvā pāreja: Pieņemsim, ka vienādība (2) izpildās, ja $n = k$, $k \in Z$.

$$1^5 + 2^5 + ... + k^5 = \frac{k^2(k+1)^2(2k^2+2k-1)}{12} \quad (*).$$

Jāpierāda, ka tā izpildās arī, ja $n = k+1$:

$$1^5 + 2^5 + ... + k^5 + (k+1)^5 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2(2(k+1)^2 + 2(k+1) - 1)}{12} \quad (**).$$

Vienādības (∗∗) kreisās puses pirmos k saskaitāmos aizstāj ar (∗) labo pusi.

Iznesot pirms iekavām $\dfrac{(k+1)^2}{12}$, iegūst:

$1^5 + 2^5 + ... + k^5 + (k+1)^5 = \dfrac{k^2(k+1)^2(2k^2+2k-1)}{12} + (k+1)^5 =$

$= \dfrac{(k+1)^2}{12} \cdot [\, k^2(\, 2k^2+2k-1) + 12\cdot(k+1)^3 \,].$

Tā kā reizinātājs $\dfrac{(k+1)^2}{12}$ kopīgs (∗∗) abām pusēm, tad pietiek pierādīt, ka

$k^2(\, 2k^2+2k-1) + 12\cdot(k+1)^3 = (k+2)^2(\, 2(k+1)^2+2(\, k+1) -1).$

To pierāda, atverot iekavas un savelkot līdzīgos locekļus, līdz ar to iegūstot, ka vienādības abas puses vienādas ar sekojošu izteiksmi:

$2k^4+14k^3+35k^2+36k+12.$

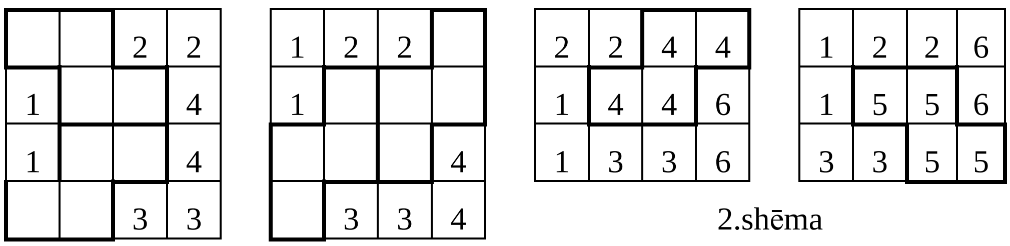
Vienādība (∗∗), līdz ar to arī vienādība (2), pierādīta.

Tai pašā laikā zināms, ka $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Lai pierādītu a) piemēru, atliek ievērot, ka dalījums $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ir vesels skaitlis visiem naturāliem n.

b) piemērā bez tam jāpierāda, ka arī $\dfrac{n(n+1)(2n^2+2n-1)}{6}$ ir vesels skaitlis katram n. To pierāda, aplūkojot atsevišķi variantus, kad, dalot ar 3, n dod atlikumu 0, 1 vai 2.

45.18. Sekojošā shēma 1 (pa kreisi - apakšējais slānis, pa labi - augšējais) parāda, kā no *CIBĀM* var salikt paralēlskaldni ar izmēriem 2×4×4. Skaidrs, ka no diviem šādiem paralēlskaldņiem var salikt kubu 4×4×4; saprotams, ka tas ir mazākais no *CIBĀM* saliekamais kubs.



1.shēma

2.shēma

45.10. zīm.

Piezīme. Ja salikts jebkurš paralēlskaldnis ar izmēriem $a\times b\times c$, tad, protams, var salikt kubu ar šķautnes garumu abc ("platumā" jāņem ab paralēlskaldņi, "dziļumā" ac paralēlskaldņi un "augstumā" bc paralēlskaldņi). Tam var izmantot, piemēram, shēmu 2, kur parādīts, kā salikt "mazāku" paralēlskaldni $2\times3\times4$.

45.19. Pierādīsim, ka nav cilvēka, kam ir tikai viens paziņa. Tiešām, ja cilvēkam A vienīgais paziņa būtu B, tad B jāpazīst arī jebkuru citu cilvēku C (jo A nepazīst C, tātad A un C jābūt kopīgam paziņam, bet tāds var būt vienīgi B). Iznāk, ka B pazīst visus - pretruna. Līdzīgi pierāda, ka nav arī cilvēka, kam nav neviena paziņas. Tātad katram ir vismaz divi paziņas.

Pieņemsim no pretējā, ka pazīšanos summa S ir mazāka par 72. Tā kā S ir pāra skaitlis (katra pazīšanās ieskaitīta tajā divas reizes), tad $S\leq70$. Saskaņā ar Dirihlē principu kādam cilvēkam (sauksim to par profesoru) ir tieši divi paziņas (sauksim tos par docentiem). Pārējos 22 zinātniekus sauksim par maģistriem. Neviens maģistrs nepazīst profesoru, tāpēc katrs maģistrs pazīst kādu no docentiem. Tāpēc docentu pazīšanos ar maģistriem kopskaits ir vismaz 22, bet docentu visu pazīšanos kopskaits ir vismaz 22+2. Tāpēc pilnīgi visu pazīšanos kopskaits ir vismaz

2 (profesoram) + 2 (docentiem ar profesoru) + 22 (docentiem ar maģistriem) +

$22\cdot2$ (maģistriem) = 70. Redzam, ka citu pazīšanos bez minētajām nevar būt, tātad

1) docenti savā starpā nav pazīstami,
2) katrs maģistrs pazīstams ar vienu docentu,
3) katrs maģistrs pazīstams tieši ar vienu citu maģistru.

Ar vienu no abiem docentiem D_1 pazīstami vismaz 11 maģistri. Lai docentam D_2 būtu kopīgi paziņas ar katru no maģistriem, katram no D_2 "apakšmaģistriem" jāpazīst kādu D_1 "apakšmaģistru", pie tam katram citu (jo katram D_1 apakšmaģistram ir tieši 2 paziņas). Tāpēc gan D_1, gan D_2 katrs pazīst tieši 11 maģistrus, kas savā starpā pazīstas pa pāriem (viens no D_1 grupas, otrs no D_2 grupas). Bet tad, ja divi maģistri (viens no D_1 grupas, otrs no D_2 grupas) viens otru nepazīst, tiem nav kopīga paziņas. Pretruna.
Tātad mūsu pieņēmums nepareizs, un $S\geq72$.

45.20. Tā kā

$1 = 1;$

$2 = 1+1;$

$3 = 3 = 1+1+1;$

$4 = 1+1+1+1 = 1+3 = 3+1 = 4;$

$5 = 1+1+1+1+1 = 1+1+3 = 1+3+1 = 3+1+1 = 1+4 = 4+1;$

$6 = 1+1+1+1+1+1 = 1+4+1 = 4+1+1 = 1+1+4 = 3+3 =$

$= 3+1+1+1 = 1+3+1+1 = 1+1+3+1 = 1+1+1+3$,

tad redzam, ka $a_1=1$; $a_2=1$; $a_3=2$; $a_4=4$; $a_5=6$; $a_6=9$. Līdzīgi iegūstam $a_7=15$, $a_8=25$.

Rodas hipotēze, ka $a_{2n} = F_n^2$, $a_{2n+1} = F_n F_{n+1}$, kur F_0; F_1; F_2; ... ir Fibonači virkne: $F_0=1$, $F_1=1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Pierādīsim to ar matemātisko indukciju.

Pierādījumā galveno lomu spēlēs sakarība

$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4}$.

Tiešām, skaitli n izsakošā summa var sākties ar saskaitāmo 1 (tad atlikušo saskaitāmo summa ir n-1, tāpēc summu skaits ir a_{n-1}), ar saskaitāmo 3 (šādu summu skaits ir a_{n-3}) vai ar saskaitāmo 4 (šādu summu skaits ir a_{n-4}).

Bāze. Apgalvojums pareizs pie n =1; 2; 3; 4; 5; 6.

Pāreja. Pieņemsim, ka apgalvojums pareizs visiem indeksiem, kas mazāki par n. Aplūkosim a_n. Šķirosim divus gadījumus:

a) n - pāra skaitlis, $n = 2k$. Tad

$a_n = a_{n-1}+ a_{n-3}+ a_{n-4} = a_{2k-1}+ a_{2k-3}+ a_{2k-4} =$

$= a_{2(k-1)+1}+ a_{2(k-2)+1}+ a_{2(k-2)} =$

$= F_{k-1}\cdot F_k+ F_{k-2}\cdot F_{k-1}+ F_{k-2}^2 = F_{k-1}\cdot F_k+ F_{k-2}\cdot(F_{k-1}+ F_{k-2}) =$

$= F_{k-1}\cdot F_k+ F_{k-2}\cdot F_k=F_k (F_{k-1} + F_{k-2}) = F_k^2$

b) n - nepāra skaitlis, $n=2k+1$. Tad

$a_n = a_{2k}+ a_{2k-2}+ a_{2k-3} = F_k^2+ F_{k-1}^2+ F_{k-2}\cdot F_{k-1} =$

$= F_k^2+ F_{k-1}(F_{k-1}+ F_{k-2}) = F_k^2+ F_{k-1}\cdot F_k = F_k(F_k+F_{k-1}) = F_k\cdot F_{k+1}$.

Induktīvā pāreja izdarīta, apgalvojums pierādīts.

45.21. Pieņemsim, ka izveidota skaitļu virkne n_0, $n_{k+1} = 2n_k - 1$, un pie tam $f(n_0) = n_1$.

Pierādīsim, ka $f(n_k)=n_{k+1}$. Lietosim matemātisko indukciju.

Ja $k=0$, apgalvojums pareizs. Tālāk pieņemsim, ka $f(n_m)=n_{m+1}$. Tad

$f(n_{m+1}) = f(f(n_m))= 4n_m-3=2\cdot(2n_m-1)-1=2\cdot n_{m+1}-1= n_{m+2}$, kas arī bija jāpierāda.

Izvēloties $n_0 = 64$, saskaņā ar doto, $n_1 = 2\cdot 64-1 = 127$, un tiešām

$f(64) = f(2^6) = 2^7-1 = 127$. Tāpēc iegūstam $n_0=64$; $n_1=127$; $n_2=253$; $n_3=505$; $n_4=1009$; $n_5=2017$; $n_6=4033$; $n_7=8065$.

Tāpēc $f(8065) = n_8 = 2\cdot 8065-1 = 16129$.

45.22. Naturālam skaitlim n ar $B(n)$ apzīmēsim tā balto dalītāju skaitu, ar $M(n)$ - melno dalītāju skaitu. Definēsim $S(n) = B(n) - M(n)$.

Pieņemsim, ka n_1 un n_2 ir savstarpēji pirmskaitļi un $n = n_1 \cdot n_2$;

apzīmēsim ar d kādu skaitļa n nepāra dalītāju. Acīmredzot $d = d_1 \cdot d_2$, kur d_1 un d_2 ir attiecīgi skaitļu n_1 un n_2 nepāra dalītāji. Arī otrādi, ja d_1 un d_2 ir attiecīgi skaitļu n_1 un n_2 nepāra dalītāji, tad $d_1 \cdot d_2$ ir n nepāra dalītājs.

Izsekojot atlikumiem pēc moduļa 4, viegli secināt:

ja d ir balts, tad d_1 un d_2 vai nu abi balti, vai abi melni;

ja d ir melns, tad viens no d_1 un d_2 ir balts, bet otrs - melns.

Arī otrādi, ja d_1 un d_2 krāsas sakrīt, tad d ir balts, bet, ja atšķiras, tad melns.

No šejienes seko, ka

$B(n_1 n_2) = B(n_1) \cdot B(n_2) + M(n_1) \cdot M(n_2)$,

$M(n_1 n_2) = B(n_1) \cdot \mathrm{M}(n_2) + M(n_1) \cdot B(n_2)$.

Tāpēc

$S(n_1 n_2) = B(n_1) \cdot B(n_2) + M(n_1) \cdot M(n_2) - B(n_1) \cdot M(n_2) - M(n_1) \cdot B(n_2) =$

$(B(n_1) - M(n_1)) \cdot (B(n_2) - M(n_2)) = S(n_1) \cdot S(n_2)$.

Tāpēc apgalvojumu $S(n) \geq 0$ pietiek pierādīt pirmskaitļu pakāpēm p^k. Ja $p=2$, $\mathrm{S}(n)=1-0=1$; ja p ir formā $4t+1$, tad visi p^k dalītāji ir balti, tāpēc $S(n)>0$; ja p ir formā $4t+3$, tad p^k dalītāju virknē 1; p; p^2; ... balti un melni dalītāji izvietojas pamīšus, tāpēc $S(p^k)=1$ vai $S(p^k)=0$.

45.23. Vispirms pierādīsim nevienādību, ja $n = 3$:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} - \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_3}{x_2} - \frac{x_1}{x_3} =$$

$$\frac{x_1{}^2 x_3 + x_2{}^2 x_1 + x_3{}^2 x_2 - x_2{}^2 x_3 - x_3{}^2 x_1 - x_1{}^2 x_2}{x_1 x_2 x_3} =$$

$$\frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)}{x_1 x_2 x_3} \geq 0.$$

Prasīto iegūsim, saskaitot nevienādības

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} \geq \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} \qquad (x_1, x_2, x_3),$$

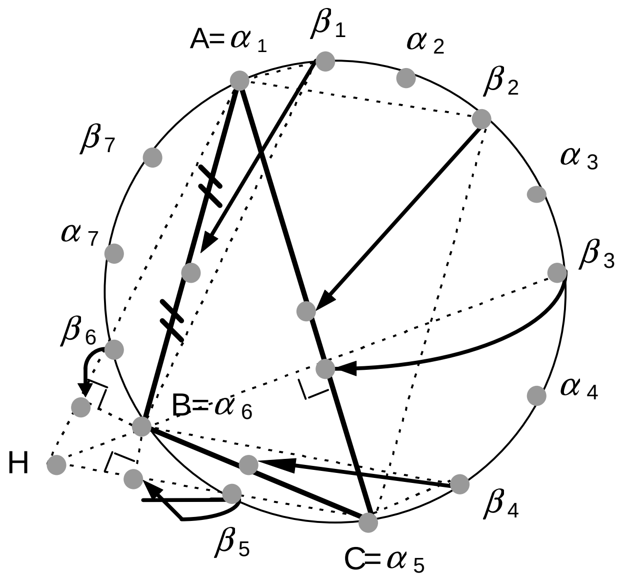
$$\frac{x_1}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \frac{x_4}{x_1} \geq \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_4}{x_3} + \frac{x_1}{x_4} \qquad (x_1, x_3, x_4),$$

$$\frac{x_1}{x_4}+\frac{x_4}{x_5}+\frac{x_5}{x_1}\geq\frac{x_4}{x_1}+\frac{x_5}{x_4}+\frac{x_1}{x_5} \qquad (x_1, x_4, x_5),$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{x_1}{x_{n-1}}+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geq\frac{x_{n-1}}{x_1}+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_1}{x_n} \qquad (x_1, x_{n-1}, x_n).$$

45.24. Apskatām riņķī ievilktu regulāru 14-stūri. Aplūkojamais trijstūris ir *ABC* (skat 45.11 zīm.).



45.11. zīm.

No teorēmām par iekšējo un ārējo leņķi seko, ka trijstūra *ABC* augstumi atrodas uz taisnēm $\alpha_1\beta_6$, $\alpha_5\beta_5$ un $\alpha_6\beta_3$. Apzīmēsim to krustpunktu ar *H*.

Apskatīsim homotētiju ar centru *H* un koeficientu $\frac{1}{2}$. Ievērosim, ka $\beta_1\alpha_5$ – diametrs, tāpēc $\alpha_6\beta_1 \parallel \alpha_1 H$; pēc teorēmas par lokiem starp paralēlām hordām $H\alpha_6 \parallel \alpha_1\beta_1$. Tāpēc $H\alpha_1\beta_1\alpha_6$ ir paralelograms, un β_1 attēlojas par *AB* viduspunktu. Līdzīgi iegūstam, ka β_2 attēlojas par *AC* viduspunktu un β_4 attēlojas par *BC* viduspunktu (attiecīgi paralelogrami $H\alpha_1\beta_2\alpha_5$ un $H\alpha_6\beta_4\alpha_5$).

Zināma teorēma, ka punkti, kas simetriski ortocentram attiecībā pret malām, atrodas uz apvilktās riņķa līnijas. No šejienes secinām, ka β_3 attēlojas par augstuma *BH* pamatu, β_5 - par augstuma *CH* pamatu, β_6 - par augstuma *AH* pamatu.

Tātad mūs interesējošie 6 punkti ir β_1, β_2, β_3, β_4, β_5, β_6 homotētiskie attēli. Atliek ievērot, ka $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6\beta_7$ ir regulārs septiņstūris.

45.25. a) Nē, nevar. Izvēlētu 10 skaitļu gadījumā būtu 2^{10}-1=1023 netukšas apakškopas, bet apakškopas elementu summa S ir naturāls skaitlis, kas noteikti apmierina nevienādības $1 \le S \le 990$. Tāpēc starp apakškopām būs divas ar vienādām summām.

b) Jā, var. Piemēram, varam izvēlēties skaitļus

$3 \cdot 2^0$; $3 \cdot 2^1$; $3 \cdot 2^2$; $3 \cdot 2^3$; $3 \cdot 2^4$; $3 \cdot 2^5$; $3 \cdot 2^5-1$; $3 \cdot 2^5+1$.

c) Nē, nevar. Pieņemsim no pretējā, ka esam izvēlējušies 9 skaitļus

$a_1 < a_2 < \cdots < a_9$.

Aplūkosim vispirms apakškopas, kas satur 3; 4; 5 vai 6 elementus. Tādu pavisam ir

$C_9^3 + C_9^4 + C_9^5 + C_9^6$ = 84+126+126+84 = 420.

Tā kā visām šīm apakškopām summas dažādas, tad lielākā summa pārsniedz mazāko vismaz par 419. Tāpēc

$(a_4+ a_5+ a_6+ a_7+ a_8+ a_9) - (a_1+ a_2+ a_3) \ge 419$.

Tagad aplūkosim apakškopas, kurās ir 2, 3 vai 4 elementi, kuri nav mazāki par a_4, un varbūt vēl kādi citi. Tādu pavisam ir

$2^3 \cdot (C_6^2 + C_6^3 + C_6^4) = 8 \cdot (15+20+15) = 400$.

Līdzīgi kā iepriekš iegūstam

$(a_9+ a_8 + a_7+ a_6+ a_1+ a_2+ a_3) - (a_4+a_5) \ge 399$.

Saskaitot iegūtās nevienādības, iegūstam

$2 \cdot (a_6+ a_7+ a_8+ a_9) \ge 818$

$a_6+ a_7+ a_8+ a_9 \ge 409$

Ja $a_9 \le 100$, tad tā nevar būt. Tiešām,

ja $a_9 \le 100$, tad $a_8 \le 99$, $a_7 \le 98$, $a_6 \le 97$, tāpēc

$a_9+ a_8 + a_7+ a_6 \le 100+99+98+97<400$ - pretruna.

Tātad mūsu pieņēmums nepareizs un 9 skaitļus ar prasītajām īpašībām izvēlēties nevar.