Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 45. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

9. klase

45.1. Dots, ka $x^3 > 2$. Pierādīt, ka

a) $x^6 > 4$,

b) $x^7 > 5$.

45.2. Dots, ka x un y - naturāli skaitļi un $x + y = 1995$.

Pierādīt, ka $x \cdot y$ nedalās ar 1995.

45.3. Divu koncentrisku riņķa līniju rādiusi ir R un r ($R > r$). Taisnstūra $ABCD$ virsotnes A un B atrodas uz lielākās riņķa līnijas, C un D – uz mazākās.

a) Kāds ir lielākais iespējamais taisnstūra $ABCD$ laukums?

b) Atrast, kādi šajā gadījumā ir tā malu garumi!

45.4. Plaknē doti 1995 sarkani punkti; nekādi 3 no tiem neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka var novilkt riņķa līniju, kura iet caur 3 sarkaniem punktiem un kuras iekšpusē sarkano punktu nav.

45.5. Katrs klases skolēns apmeklē divus pulciņus. Katriem diviem skolēniem var atrast vismaz vienu pulciņu, kuru viņi apmeklē. Pierādīt, ka ir pulciņš, kuru apmeklē vismaz divas trešdaļas visu klases skolēnu.

10. klase

45.6. Dots, ka vienādojuma $x^2 + px + 1 = 0$ saknes ir α un β, vienādojuma $x^2 + qx + 1 = 0$ saknes ir γ un δ.

Pierādīt, ka $(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = (q - p)^2$

45.7. Neviens no četriem naturāliem skaitļiem a; b; c; d nedalās ar 5. Pierādīt, ka izteiksmē $\pm a \pm b \pm c \pm d$ var tā izvēlēties "+" un "-" zīmes skaitļu priekšā, lai iegūtās izteiksmes vērtība dalītos ar 5.

45.8. Izliekta daudzstūra laukums ir L un perimetrs P. Tā iekšpusē atrodas riņķis ar rādiusu R.
Pierādīt, ka $R \le \frac{2L}{P}$.

45.9. Turnīrā piedalījās n dalībnieki ($n \ge 2$). Katrs spēlēja ar katru citu vienu reizi; neizšķirtu nav. Par laureātu sauc katru dalībnieku A, kam izpildās sekojoša īpašība: ja A zaudējis kādam dalībniekam B, tad eksistē tāds trešais dalībnieks C, ka A uzvarējis pret C un C uzvarējis pret B.
Zināms, ka turnīrā ir tikai viens laureāts. Pierādīt, ka viņš uzvarējis visus pārējos dalībniekus.

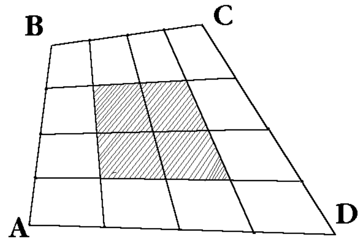
45.10. Aplūkosim visas ciparu virknes garumā n, kas sastāv tikai no nullēm un vieniniekiem (pieļaujamas arī virknes, kurās visi cipari vienādi). Kādu lielāko daudzumu šādu virkņu var izvēlēties, lai katras divas izvēlētās virknes atšķirtos viena no otras vismaz divās pozīcijās? (Saka, ka divas virknes atšķiras i-jā pozīcijā, ja vienā no tām i-tais cipars ir 0, bet otrā i-tais cipars ir 1).

11. klase

45.11. Atrast kaut vienu tādu naturālu skaitli A, kas vienlaicīgi apmierina šādas trīs īpašības:
a) pareizinot A ar 2, iegūst naturāla skaitļa kvadrātu,
b) pareizinot A ar 3, iegūst naturāla skaitļa kubu,
c) pareizinot A ar 5, iegūst naturāla skaitļa piekto pakāpi.

45.12. Uz n kartītēm uzrakstīts pa vienam pozitīvam skaitlim (starp tiem var būt arī vienādi). Ar b_k (k = 1; 2; 3; …) apzīmēsim to kartīšu skaitu, uz kurām uzrakstītie skaitļi nav mazāki par k. Pierādīt, ka visu uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summa nav mazāka par $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$(saskaitām visus b_i, kas nav 0). Kad pastāv vienādība?

45.13. Izliektā četrstūrī *ABCD* katra mala sadalīta 4 vienādās daļās, un dalījuma punkti savienoti ar taisnes nogriežņiem (skat. 45.1. zīm.).



45.1. zīm.

Pierādīt, ka iesvītroto 4 rūtiņu kopējais laukums ir $\frac{1}{4}$ no *ABCD* laukuma.

45.14. Dots, ka saskaitot jebkurus divus no skaitļiem a_1; a_2; a_3; a_4; a_5, rezultāts nav negatīvs.

Pierādīt: ja $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1$ un x_1; x_2; x_3; x_4; x_5 nav negatīvi, tad

$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5\geq a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+a_4x_4^2+a_5x_5^2$.

45.15. Izliektā n-stūrī jānovelk n-3 diagonāles tā, lai tas sadalītos n-2 trijstūros un lai nekādām divām novilktajām diagonālēm nebūtu citu kopēju punktu, izņemot varbūt galus. Bez tam nepieciešams, lai iegūto nogriežņu sistēmu (n-stūra malas un novilktās diagonāles) varētu uzzīmēt kā slēgtu lauztu līniju ar vienu vilcienu, neatraujot zīmuli no papīra un nevienu nogriezni nenovelkot vairāk par vienu reizi. Vai to var izdarīt, ja

a) $n=1994$,

b) $n=1995$?

12. klase

45.16. Atrisināt vienādojumu

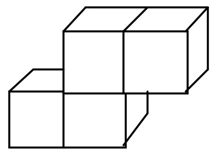
$4\sin x\cdot\cos x=\text{tg}\,x+\text{ctg}\,x$.

45.17. Pierādīt, ka katram naturālam n

a) $1^3+2^3+\cdots+n^3$ dalās ar $1+2+\cdots+n$,

b) $1^5+2^5+\cdots+n^5$ dalās ar $1+2+\cdots+n$.

45.18. Figūra *CIBA* sastāv no 4 vienādiem kubiņiem; daži no tiem saskaras pa skaldnēm (skat. 45.2.zīm.)



45.2. zīm.

a) pierādīt, ka no figūrām *CIBA* var salikt paralēlskaldni,

b) vai no figūrām *CIBA* var salikt kubu (vienalga kādu) ?

45.19. Konferencē piedalās 25 zinātnieki; daži no tiem ir pazīstami savā starpā. (Uzskatām: ja *A* pazīst *B*, tad *B* pazīst *A*.) Neviens zinātnieks nepazīst visus pārējos; ja divi zinātnieki viens otru nepazīst, tad tiem ir vismaz viens kopīgs paziņa.

Pierādīt: ja katram zinātniekam aprēķina viņa paziņu skaitu un iegūtos skaitļus saskaita, tad summa nav mazāka par 72.

45.20. Ar a_n apzīmējam to dažādo veidu skaitu, kuros n var izsacīt kā tādu saskaitāmo summu, kas nepieņem citas vērtības kā 1; 3; 4. Pieļaujamas arī summas, kas sastāv no viena saskaitāmā. Veidus, kas atšķiras tikai ar saskaitāmo kārtību, uzskatām par dažādiem.

Piemēram, $a_1=1$; $a_2=1$; $a_3=2$; $a_4=4$.

Pierādīt: ja n – pāra skaitlis, tad a_n ir naturāla skaitļa kvadrāts.

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

45.21. Funkcijas f(n) arguments var pieņemt vērtības 1; 2; 3; … .

Zināms, ka

1) katram naturālam n $f\left(f(n)\right)=4n-3$,

2) $f\left(2^k\right)=2^{k+1}-1$, ja k = 0; 1; 2; … .

Aprēķināt $f(8065)$.

45.22. Naturālu skaitli sauksim par baltu, ja tas dod atlikumu 1, dalot ar 4, un par melnu, ja tas dod atlikumu 3, dalot ar 4.

Pierādīt, ka katram naturālam n balto dalītāju nav mazāk nekā melno.

45.23. Dots, ka $0<x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n$. Pierādīt, ka

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1} \geq \frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\ldots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_1}{x_n}.$$

45.24. Trijstūra leņķu lielumi ir $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}$ un $\frac{4\pi}{7}$. Pierādīt, ka tā malu viduspunkti un augstumu pamati ir regulāra septiņstūra virsotnes.

45.25. Vai no naturāliem skaitļiem, kas mazāki par 100, var izvēlēties n skaitļus tā, lai visas izvēlēto skaitļu summas pa 1, pa 2,…, pa n būtu dažādas?

Atrisināt uzdevumu, ja a) $n=10$, b) $n=8$, c) $n=9$.