Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 48. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

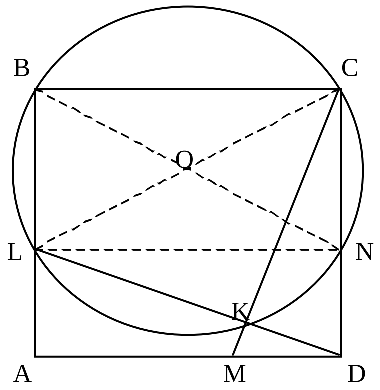
48.1. Tā kā grafika parabolas zari vērsti uz augšu, tad koeficientam pie x^2 jābūt pozitīvam, t.i., $a>0$. Pēc grafika arī redzams, ka, $f(0)=c>0$. Tā kā $a>0$ un $c>0$, tad, lai pie pozitīvām x vērtībām varētu gadīties $y<0$, nepieciešams, lai $b<0$. Tā kā $f(1)=a+b+c<0$ un $c>0$, tad arī $a+b<0$.

48.2. Apzīmējam skaitli labējā augšējā rindiņā ar *x*. Tad no labējās kolonnas redzam, ka katrā līnijā summa ir $x+28$. Tagad tabulu var aizpildīt viennozīmīgi; turklāt tabulas diagonālē (no kreisā apakšējā stūra uz labo augšējo stūri) atradīsies skaitļi $x-8,\ x-4,\ x$. Tātad $(x-8)+(x-4)+x=x+28$, un $x=20$. Tātad tabula ir

17	11	20
19	16	13
12	21	15

48.3. Apzīmējam meklējamo skaitli ar $100\cdot n+28$; tad skaitļa *n* ciparu summa ir $28-10=18$, tātad *n* dalās ar 9. Bez tam $100\cdot n$ jādalās ar 28, tātad *n* jādalās ar 7. Tāpēc *n* dalās ar $9\cdot 7=63$. Mazākais naturālais skaitlis *n*, kas dalās ar 63 un kura ciparu summa ir 18, ir $63\cdot 3=189$. Tam atbilst meklējamais skaitlis 18928.

48.4. Atliekam $AL=DM=DN$ (skat. 48.4. zīm.)



48.4. zīm.

Tad trijstūri *LAD* un *MDC* ir vienādi (pēc divām katetēm). Tātad $\angle CKD = \angle LDM + \angle CMD = 90°$; un *CM* un *DL* krustpunkts ir minētais punkts *K*. Tā kā *BCNL* ir taisnstūris, tad ap to var apvilkt riņķa līniju ar centru diagonāļu krustpunktā *O*. Tā kā $\angle LKC = 90°$, tad šī riņķa līnija iet caur punktu *K*. Tātad $\angle BKN = 90°$.

48.5. Nē, nevar. Pieņemsim, ka pirmajā reizē bija n vadītāji, otrajā – $n+1$; pieņemsim pretējo, ka arī otrā sadale bija veiksmīga. Tad divi otrā sadalījuma kapteiņi *A* un *B* nonāca vienā komandā pirmajā sadalījumā; tās kapteinis bija kāds trešais skolēns *C*, jo *A* un *B* saskaņā ar doto nav draugi. Tātad *C* draudzējas gan ar *A* gan ar *B*; tāpēc otrajā sadalījumā gan *A*, gan *B* gribēs iekļaut savā komandā *C*, bet tas nav iespējams.

48.6. No pirmā vienādojuma izsakām $y = x^2 - 1$; iegūto izteiksmi ievietojam otrajā vienādojumā:

$$\left(x^2-1\right)^2 = x+1 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 2x^2 + 1 = x+1 \quad \Rightarrow \quad x(x+1)\left(x^2 - x - 1\right) = 0.$$

Dotajai vienādojumu sistēmai ir četri atrisinājumi:

(0; –1), (–1; 0), $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ un $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

48.7. Pieņemsim no pretējā, ka nevienam no dotajiem vienādojumiem reālu sakņu nav. Tādā gadījumā to diskriminantiem jābūt mazākiem par nulli, t.i

$p^2 - 4q < 0$ un $q^2 - 4p < 0$.

Līdz ar to iegūstam nevienādību sistēmu

$$\begin{cases} p^2 < 4q \\ q^2 < 4p \end{cases}$$

Tā kā nevienādību sistēma ir simetriska pret p un q, tad varam pieņemt, ka $p < q$. Sareizinot nevienādības, iegūstam $p^2q^2 < 16pq$, jeb $pq < 16$.
Tātad $p^2 < 16$ un $p \in \{1, 2, 3\}$. Viegli pārbaudīt, ka visos šajos gadījumos $q^2 - 4p \geq 0$, tātad vienādojumam $x^2 + qx + p = 0$ ir reāla sakne, kas arī bija jāpierāda.

48.8. Katram naturāla skaitļa n dalītājam d atbilst otrs dalītājs $\frac{n}{d}$. Tātad visi dalītāji sadalās pāros. Lai dalītāju skaits būtu nepāra skaitlis nepieciešams, lai vienā pārī abi dalītāji būtu vienādi, t.i. $d = \frac{n}{d} \quad \Rightarrow \quad n = d^2$.

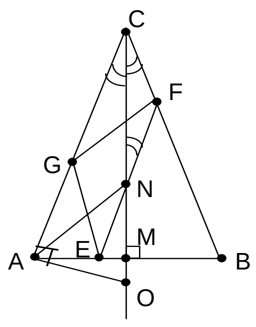
Tādējādi skaidrs, ka īpatnējie skaitļi ir naturālo skaitļu kvadrāti.

Tātad $n = y^2, n + 24 = x^2$; no šejienes $24 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$. Tā kā skaitļu $(x+y)$ un $(x-y)$ paritātes ir vienādas, tad skaitli 24 ir jāsadala divu pāra skaitļu reizinājumā; to var izdarīt divos veidos $24 = 12 \cdot 2 = 6 \cdot 4$. Iegūstam vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 12 \end{cases} \quad \text{un} \quad \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 6 \end{cases}.$$

To atrisinājumi ir (7, 5) un (5, 1). Atbilstošās n vērtības ir 25 un 1.

48.9. Apzīmēsim $\angle C$ bisektrises un trijstūra pamata krustpunktu ar M (sk. 48.5. zīm.). Tā kā ΔACB ir vienādsānu, tad $\angle C$ bisektrise ir arī augstums, tāpēc $\angle AMC = 90°$.



48.5. zīm.

Tā kā CN – bisektrise, tad

$$\angle FCN = \angle GCN. \qquad (1)$$

Tā kā pēc konstrukcijas $GC \parallel FN$ (kā paralelograma $CFEG$ pretējās malas), tad

$$\angle GCN = \angle CNF \qquad (2)$$

No (1) un (2) seko, ka $\angle FCN = \angle CNF$, bet tas nozīmē, ka ΔCFN ir vienādsānu, t.i.,

$$CF = FN. \qquad (3)$$

Tā kā *CF* un *GE* ir paralelograma *CFEG* pretējās malas, tad

$$CF = GE. \qquad (4)$$

No tā, ka paralelograma *CFEG* pretējās malas ir paralēlas, t.i., $CF \parallel GE$, izriet, ka arī $CB \parallel GE$.

Līdz ar to ΔACB un ΔAGE ir līdzīgi (*AE* un *AB* atrodas uz vienas taisnes; tāpat *AG* un *AC*, bet $CB \parallel GE$, kā tikko pierādīts). No tā seko, ka arī ΔAGE ir vienādsānu trijstūris un tāpēc

$$AG = GE. \qquad (5)$$

No (3), (4) un (5) izriet, ka

$$FN = CF = GE = AG \qquad (6)$$

No tā, ka paralelograma *CFEG* pretējās malas ir paralēlas, izriet, ka arī

$$FN \parallel AG, \qquad (7)$$

No (6) un (7) seko, ka *FNAG* ir paralelograms ; no tā, savukārt, seko, ka

$$AN \parallel GF. \qquad (8)$$

Līdz ar to uzdevuma a) daļa ir pierādīta. Tālāk pārejam pie b) daļas pierādīšanas.

No tā, ka paralelograma *CFEG* pretējās malas CG un *FE* ir paralēlas, izriet, ka arī

$$CG \parallel NE \qquad (9)$$

No dotā seko, ka $CG \perp AO$. No tā un no (9) izriet, ka

$$NE \perp AO. \qquad (10)$$

Zināms, ka *CM* ir ΔACB augstums, tāpēc arī

$$AM \perp NO. \qquad (11)$$

Aplūkosim ΔAON. No (10) un (11) seko, ka punkts *E* ir ΔAON augstumu krustpunkts. Bet tādējādi arī augstums pret malu *AN* iet caur punktu *E*, t.i.,

$$OE \perp AN. \qquad (12)$$

No (8) un (12) seko, ka

$$OE \perp GF.$$

Līdz ar to arī uzdevuma b) daļa ir pierādīta.

48.10. Pieņemsim pretējo: nav tāda brīža, kad pie Sniegbaltītes vienlaicīgi būtu ciemojušies vismaz trīs rūķīši.

Tā kā ir zināms, ka pie Sniegbaltītes ir satikušies katri divi rūķīši (un nekad trīs reizē), tad var aprēķināt, cik dažādu pāru (dažādos laikos) bijuši; šādu pāru ir 36.

No uzdevuma nosacījumiem seko, ka notikušas 9·4 = 36 rūķīšu ierašanās. Aplūkosim tos momentus, kad kāds rūķīšu pāris pirmo reizi ir pie Sniegbaltītes. Skaidrs, ka jebkurā tādā momentā ir notikusi vismaz viena rūķīša ierašanās.
Acīmredzot, pirms pirmā posma bija jāierodas diviem rūķīšiem un pirms katra nākošā posma jāierodas vēl vismaz vienam rūķītim. Tātad jānotiek vismaz 37 rūķīšu atnākšanām, bet to ir tikai 36; iegūta pretruna

48.11. Apgalvojums seko no identitātes
$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

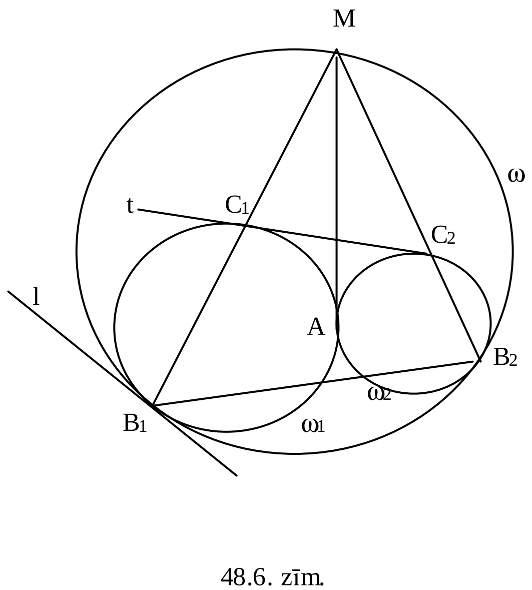
48.12. a) Ja *n* ir nepāra skaitlis, tad
$5^n+3^n+1\equiv(-1)^n+0^n+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,3)$,

un nevar būt pirmskaitlis (jo dalās ar 3 un ir lielāks par 3).
b) Tātad *n* ir pāra skaitlis. Pierādīsim, ka tas nevar būt skaitlis $4k+2$. Tiešām,
$5^{4k+2}+3^{4k+2}+1\equiv 0+\left(3^4\right)^k\cdot 3^2+1\equiv 9+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,5)$.

Tas nozīmē, ka dotais skaitlis dalās ar 5, un nevar būt pirmskaitlis.

a) Analoģiski kā iepriekšējos gadījumos pārbaudām, ka, gadījumā, ja $n=4k$ nedalās ar 3, tad dotā izteiksme dalās ar 7, un nevar būt pirmskaitlis.

48.13. Skat. 48.6. zīm.



48.6. zīm.

Savienojam C_1 ar C_2; novelkam punktā B_1 kopējo pieskari *l* riņķa līnijām ω un ω_1.
No teorēmas par pieskares kvadrātu iegūstam:
$MC_1\cdot MB_1=MA^2=MC_2\cdot MB_2$; un

$$\frac{MC_1}{MC_2} = \frac{MB_2}{MB_1}.$$

Tātad trijstūri MC_1C_2 un MB_2B_1 ir līdzīgi; no šejienes $\angle MC_1C_2 = \angle MB_2B_1$. Savukārt $\angle MB_2B_1 = \angle lB_1M$ kā ievilkts un hordas pieskares leņķi. Tātad $\angle tC_1B_1 = \angle lB_1C_1$; bet l ir riņķa līnijas ω_1 pieskare punktā B_1, tāpēc arī t ir riņķa līnijas ω_1 pieskare punktā C_1.

Līdzīgi pierāda, ka C_1C_2 pieskaras arī riņķa līnijai ω_2.

48.14. Apzīmējam $x + \sqrt{1+x^2} = t$. Tad $t > 0$ un

$\sqrt{1+x^2} = t - x \quad \Rightarrow \quad 1 + x^2 = t^2 - 2tx + x^2$; no šejienes izsakām

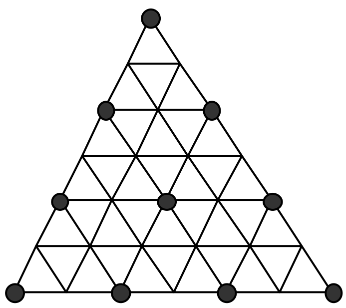
$x = \frac{t^2-1}{2t}$; līdzīgi iegūstam $y = \frac{a^2-t^2}{2at}$. Tāpēc

$$x + y = \frac{t^2-1}{2t} + \frac{a^2-t^2}{2at} = \frac{at^2 - a + a^2 - t^2}{2at} =$$

$$\frac{(a-1)(t^2+a)}{2at} = \frac{a-1}{2a} \cdot \left(t + \frac{a}{t}\right) \geq \frac{a-1}{2a} \cdot 2\sqrt{t \cdot \frac{a}{t}} = \frac{a-1}{\sqrt{a}}.$$

Vienādība pastāv tad un tikai tad, kad $x = y = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}$.

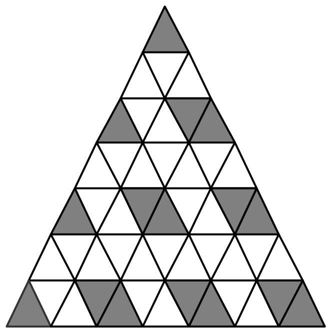
48.15. a) Aplūkosim 10 melnos punktus (skat. 48.7. zīm.).



48.7. zīm.

Pieņemsim, ka skudras nesatiekas. Aplūkosim 10 skudras, kas sākotnēji atradās melnajos punktos. Tad pēc viena gājiena tās atradīsies baltajos punktos. Aplūkosim vēl 10 skudras, kas pēc pirmā gājiena atradās melnajos punktos. Pēc otrā gājiena tās atradīsies baltajos punktos; arī pirmās 10 skudras atradīsies baltajos punktos (jo divos gājienos nevar aiziet no melnā punkta uz melno). Tātad vismaz 20 skudras atradīsies baltajos punktos, taču šādu punktu ir tikai 18. Iegūta pretruna.

b) Nē, ne noteikti. Piemēram, skudras var kustēties cikliski apkārt 48.8. zīmējumā iekrāsotajiem trijstūriem vai rombiem.



48.8. zīm.

48.16. Izteiksme nevienādības kreisajā pusē, palielinoties argumenta vērtībai par 1, palielinās vairāk kā par 1, bet izteiksme nevienādības labajā pusē, palielinoties argumenta vērtībai par 1, palielinās par 1. Tā kā $2^{10} < 10 + 1998$, bet $2^{11} > 11 + 1998$, tad der *n* vērtības, kas nepārsniedz 10.

48.17. Pēc moduļa 3 iegūstam kongruenci

$$2^x - 3^y = 7 \quad \Rightarrow \quad (-1)^x \equiv 1 \pmod{3}.$$

Tātad *x* ir pāra skaitlis 2*k*.

Līdzīgi, pēc moduļa 4 iegūstam

$$2^{2k} - 3^y = 7 \quad \Rightarrow \quad 0 - (-1)^y \equiv -1 \pmod{4} \quad \Leftrightarrow \quad (-1)^y \equiv 1 \pmod{4};$$

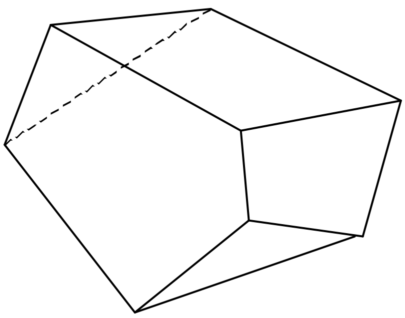
tātad arī *y* ir pāra skaitlis 2m.

Iegūstam

$4^k - 9^m = (2^k - 3^m)(2^k + 3^m) = 7$. No šejienes

$$\begin{cases} 2^k - 3^m = 1 \\ 2^k + 3^m = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^k = 4 \\ 3^m = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad k = 2,\ m = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 4,\ y = 2.$$

48.18. a) Daudzskaldnis ar 8 virsotnēm parādīts 48.9. zīmējumā.



48.9. zīm.

b) Pierādīsim, ka daudzskaldnim nevar būt mazāk par 8 virsotnēm. Vienīgais daudzskaldnis ar 4 skaldnēm ir tetraedrs, tas mums neder. Tāpēc jābūt vismaz 5 skaldnēm. Tad minimālie šķautņu skaiti tām ir 3, 3, 4, 4, 5; tātad ir vismaz viena skaldne ar vismaz 5 šķautnēm; tai ir vismaz 5 blakus skaldnes (kopā 6 skaldnes). Minimālie šķautņu skaiti tām ir 3, 3, 4, 4, 5, 5. Apskatām abas skaldnes, kurām ir ne mazāk par 5 virsotnēm; tām ir ne vairāk par 2 kopīgām virsotnēm. Tātad kopīgais virsotņu skaits ir ne mazāks par $5+5-2=8$.

48.19. a) Vienādību $f(a,b)=c$ pierakstīsim šādi: $a*b=c$. Tad dotās aksiomas var pierakstīt šādi:

$(x*y)*y=x$ un $x*(x*y)=y$.

Saskaņā ar pirmo aksiomu

$[x*(x*y)]*(x*y)=x$.

Saskaņā ar otro aksiomu kvadrātiekavās ierakstītā izteiksme ir vienāda ar *y*. Tātad

$y*(x*y)=x$; no šejienes

$y*x=y*[y*(x*y)]=$ (izmantojam 2. aksiomu) $=x*y$,

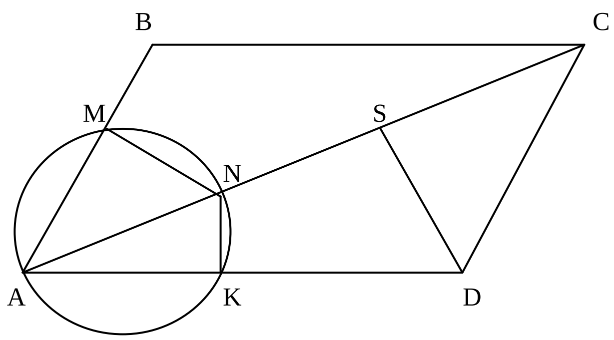
kas arī bija jāpierāda.

b) Apzīmēsim $n=0$; tad atbilstošo operāciju $*$ var definēt šādi:

$x*y\equiv -x-y \pmod{n}$.

48.20. a) Viegli pierādīt, ka mērķi var sasniegt, ja izdarām pa vienai izmaiņai virsotnēs, kurās ieiet nepāra skaits sarkano šķautņu.

48.21. Atrodam uz diagonāles *AC* tādu punktu *S*, ka $\angle AKN=\angle ASD$ (skat. 48.10. zīm.).



48.10. zīm.

Tad trijstūri AKN un ASD ir līdzīgi, un $\frac{AK}{AN}=\frac{AS}{AD}$. No trijstūru AMN un CSD līdzības seko vienādība $\frac{AM}{AN}=\frac{SC}{CD}$. Iegūstam

$\underline{AK\cdot AD=AS\cdot AN}$ un $AM\cdot CD=AN\cdot SC$, jeb $\underline{AM\cdot AB=AN\cdot SC}$.

Saskaitot pasvītrotās vienādības, iegūstam prasīto.

48.22. Aplūkosim divus gadījumus:

1) $p=2$. Iegūstam vienādojumu $2^x=y^2+1$; tātad y ir nepāra skaitlis $y=2n+1$, $2^x=4n^2+4n+2$. Vienādojuma labā puse dalās ar 2, bet nedalās ar 4. Tāpēc $x=1$; no šejienes seko, ka $y=1$.

2) p – nepāra pirmskaitlis. Tad vienādība pārveidojas formā

$p^x=(y+1)(1-y+y^2-\cdots+y^{p-1})$. No tās seko, ka $y+1=p^n$; iegūstam

$p^x=y^p+1=(p^n-1)^p+1=$

$p^{np}-C_p^1p^{n(p-1)}+C_p^2p^{n(p-2)}-\cdots-C_p^{p-2}p^{2n}+p\cdot p^n$.

Labās puses izteiksme dalās ar p^{n+1}, bet nedalās ar p^{n+2}. Tāpēc $x=n+1$. Izmantojot iepriekšējo vienādību, atrodam vienīgo atrisinājumu $p=3,\ x=y=2$.

48.23. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet, ka

$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+b_i}}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+b_i}$ un

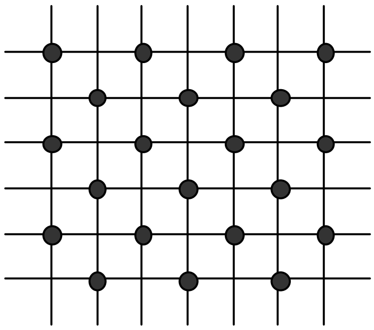
$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i}}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i}$.

Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam vajadzīgo, jo labajā pusē iegūstam vieninieku.

48.24. Doto vienādību apmierina funkcijas

$f(x)=x+c$ un $g(x)=x+d$.

48.25. Nē, tā nevar notikt. Iekrāsosim kuba virsotnes divās krāsās – melnā un baltā tā, ka katra šķautne satur melnu un baltu virsotni.; un izkrāsosim arī plaknes režģa virsotnes “šaha galdiņa” kārtībā (skat. 48.11. zīm.).



48.11. zīm.

Saskaņosim krāsojumu tā, lai sākuma pozīcijā melnās kuba virsotnes sakristu ar melnajām režģa virsotnēm. Viegli redzēt, ka šī īpašība saglabājas, kad kubs pārveļas kādai no atbalsta skaldnes šķautnēm. Tātad šī īpašība saglabāsies līdz kustības beigām. Bet, ja kubs būtu pagriezts par $90°$ ap vertikālo asi, tā nebūtu saglabājusies.