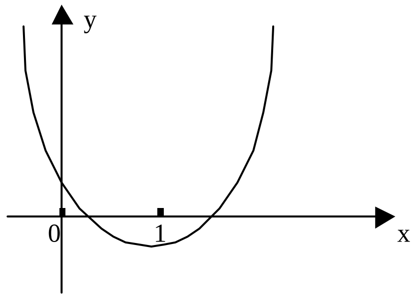
Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas Republikas 26.-51. matemātikas olimpiādes"

LATVIJAS REPUBLIKAS 48. OLIMPIĀDE

UZDEVUMI

9. klase

48.1. Zināms, ka 48.1.zīm. attēlots funkcijas $y = ax^2 + bx + c$ grafiks. Noskaidrojiet, vai skaitļi a; b; c; $a + b + c$; $a + b$ ir pozitīvi, negatīvi vai 0.



48.1. zim.

48.2. Kā 48.2.zīm. parādītajā tabulā tukšajās rūtiņās ierakstīt pa skaitlim tā, lai visās rindās, visās kolonnās un abās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas būtu savā starpā vienādas?

17		
		13
		15

48.2. zīm.

48.3. Atrast mazāko naturālo skaitli, kam vienlaicīgi piemīt trīs īpašības: tas dalās ar 28, tā ciparu summa ir 28 un tā divi pēdējie cipari veido skaitli 28.

48.4. Uz kvadrāta $ABCD$ malas AD ņemts punkts M, bet uz malas CD – punkts N tā, ka $DM = DN$. No D novilkts perpendikuls pret MC; perpendikula pamats ir K. Pierādīt, ka $\angle BKN = 90°$.

48.5. Fizkultūras stundā klasei bija jāsadalās komandās. Vispirms skolotājs nozīmēja komandu vadītājus, starp kuriem nebija draugu; pēc tam katrs vadītājs uzaicināja savā komandā visus savus draugus. Laimīgā kārtā izrādījās, ka skolotāja plāns bija veiksmīgs: neviens bērns netika uzaicināts divās komandās, un neviens nepalika ārpus komandām.

Nākošajā stundā skolotājs nozīmēja par vienu vadītāju vairāk (starp vadītājiem atkal nav draugu). Vai var gadīties, ka klase atkal veiksmīgi sadalīsies komandās? (Pieņemam, ka visas draudzības ir abpusējas un nemainās.)

10. klase

48.6. Atrisināt vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} x^2 = y+1 \\ y^2 = x+1 \end{cases}$$

48.7. Dots, ka p un q ir dažādi naturāli skaitļi. Pierādīt, ka vismaz vienam no vienādojumiem $x^2 + px + q = 0$ un $x^2 + qx + p = 0$ ir reāla sakne.

48.8. Naturālu skaitli sauc par ïpatnēju, ja tam ir nepāra skaits dalītāju (apskatām tikai pozitīvus dalītājus, ieskaitot 1 un pašu skaitli.)

Zināms, ka gan n, gan $n+24$ ir īpatnēji skaitļi. Atrast n.

48.9. Dots, ka ΔACB ir vienādsānu ($AC = CB$). Uz malām AB, BC, CA atbilstoši ņemti punkti E, F un G tā, ka $EFCG$ ir paralelograms, pie tam $AE < EB$. Leņķa C bisektrise krusto nogriezni EF punktā N. Perpendikulu, kas caur punktu A vilkts pret AC, šī bisektrise krusto punktā O.

a) pierādīt, ka $AN \parallel GF$,

b) pierādīt, ka $OE \perp FG$.

48.10. Katrs no deviņiem rūķīšiem šogad četras reizes ciemojies pie Sniegbaltītes, katru reizi pavadot tur kādu laika sprīdi. Ir zināms, ka katri divi rūķīši ir satikušies pie Sniegbaltītes. Pierādīt, ka kādu brīdi pie Sniegbaltītes vienlaicīgi ciemojās vismaz trīs rūķīši.

11. klase

48.11. Dots, ka $a+b+c=0$. Pierādīt, ka $a^3+b^3+c^3=3abc$.

48.12. Dots, ka n – naturāls skaitlis, bet $5^n + 3^n + 1$ ir pirmskaitlis. Pierādīt, ka

a) n dalās ar 2,

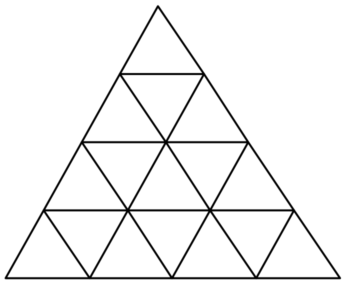
b) n dalās ar 4,

c) n dalās ar 12.

48.13. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 ārēji pieskaras viena otrai punktā A, bet iekšēji – trešajai riņķa līnijai ω atbilstoši punktos B_1 un B_2. Abu pirmo riņķa līniju kopējā iekšējā pieskare krusto riņķa līniju ω divos punktos; viens no tiem ir M. Nogrieznis MB_1 krusto ω_1 punktā C_1, bet nogrieznis MB_2 krusto ω_2 punktā C_2.
Pierādīt, ka C_1C_2 ir riņķa līniju ω_1 un ω_2 kopējā ārējā pieskare.

48.14. Dots, ka $a > 1$ un $\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right) = a$.
Atrast mazāko iespējamo $x + y$ vērtību.

48.15. Vienādmalu trijstūra katra mala sadalīta n vienādos nogriežņos; dalījuma punkti savienoti ar nogriežņiem, kas paralēli trijstūra malām. Sākotnējais trijstūris tādējādi sadalās n^2 mazos vienādmalu trijstūrīšos (skat. 48.3.zīm., kur $n = 4$). Šo trijstūrīšu virsotnes saucam par režģa virsotnēm.



48.3. zīm.

Katrā iegūtā režģa virsotnē atrodas pa skudrai. Skudras vienlaicīgi sāk ar vienādiem un nemainīgiem ātrumiem rāpot pa režģa līnijām. Skudras maina kustības virzienu tikai režģa virsotnēs. Nonākot kādā režģa virsotnē, katra skudra pagriežas par 60° vai 120° (vienalga uz kuru pusi) un turpina ceļu pa režģa līnijām.

a) pierādiet: ja $n = 6$, tad dažas skudras kādreiz noteikti satiksies,

b) vai tas noteikti notiks, ja $n = 7$?

12. klase

48.16. Kādiem naturāliem n pastāv nevienādība

$$2^n < n + 1998\ ?$$

48.17. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$2^x - 3^y = 7\ .$$

48.18. Sauksim izliektu daudzskaldni par <u>daudzpusīgu</u>, ja nekādām trim tā skaldnēm nav vienāds šķautņu skaits.

a) atrast kaut vienu daudzpusīgu daudzskaldni,

b) kāds ir mazākais iespējamais virsotņu skaits daudzpusīgam daudzskaldnim ?

48.19. Pieņemsim, ka *n* – naturāls skaitlis. Funkcijas $f(x,y)$ argumenti un vērtības ir naturāli skaitļi, kas nepārsniedz *n*. Dots, ka katriem naturāliem *x* un *y*, kas nepārsniedz *n*, pastāv vienādības

$$f(f(x,y),y) = x \text{ un } f(x, f(x,y)) = y\ .$$

a) pierādīt, ka visiem naturāliem *x* un *y*, kas nepārsniedz *n*, pastāv vienādība

$$f(x,y) = f(y,x);$$

b) kādiem naturāliem *n* šāda funkcija *f* eksistē ?

48.20. Dots, ka *n* – nepāra skaitlis, $n \geq 5$. Regulāra *n*-stūra katra mala un katra diagonāle nokrāsota vai nu balta, vai sarkana. Ar vienu gājienu atļauts mainīt krāsojumu visiem nogriežņiem, kas iziet no vienas virsotnes: baltos nogriežņus pārkrāsot sarkanus, bet sarkanos – baltus.

a) pierādīt, ka ar šādiem gājieniem var panākt, lai no katras virsotnes izietu pāra skaits sarkanu nogriežņu (tādu krāsojumu sauksim par labu),

b) pierādīt, ka no katra sākotnējā krāsojuma var iegūt tikai vienu labu krāsojumu.

PAPILDSACENSĪBAS PAR VIETU REPUBLIKAS IZLASĒ

48.21. Dots, ka *ABCD* ir paralelograms. Riņķa līnija iet caur virsotni *A* un krusto malu *AB* punktā *M*, diagonāli *AC* punktā *N* un malu *AD* punktā *K*. Pierādīt, ka

$$AC \cdot AN = AB \cdot AM + AD \cdot AK.$$

48.22. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$p^x - y^p = 1,$$

ja *p* ir pirmskaitlis.

48.23. Pierādīt nevienādību

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n},$$

ja visi skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ ir pozitīvi.

48.24. Funkciju $f(t)$ un $g(t)$ argumenti un vērtības ir veseli skaitļi, pie tam funkcija $g(t)$ dažādām argumenta vērtībām pieņem dažādas vērtības. Zināms, ka visiem veseliem skaitļiem x un y pastāv vienādība

$$f(g(x)+y)=g(f(y)+x).$$

Atrast funkcijas f un g un pierādīt, ka citu bez jūsu atrastajām nav.

48.25. Plakne sadalīta vienādos kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Uz tās novietoja kubu tā, ka viena kuba skaldne precīzi sakrita ar vienu no rūtiņām. Kubu sāka ripināt pa plakni, pakāpeniski “pārveļot” pāri kādai no atbalsta skaldnes šķautnēm. Kādā brīdī tika konstatēts, ka kubs balstās uz plaknes ar to pašu skaldni, ar kuru sākumā, un atrodas tai pašā vietā, kur sākumā. Vai var gadīties, ka šai brīdī kubs, salīdzinot ar sākotnējo pozīciju, pagriezts par 90° ap vertikālo asi, kas iet caur atbalsta skaldnes centru ?