Latvijas 50.matemātikas olimpiādes
3.kārtas
uzdevumu atrisinājumi

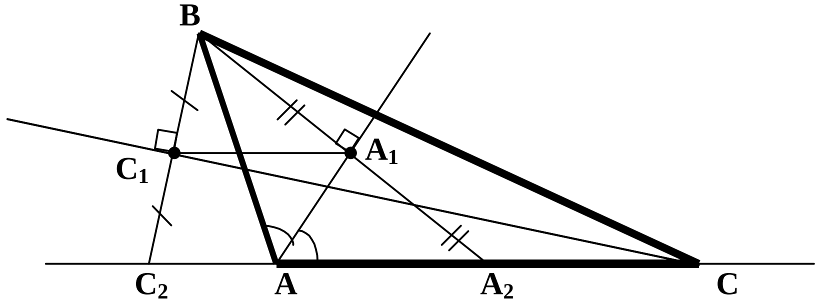
9.1. Katram veselam n vai nu n, vai n+1 ir pāra skaitlis. Tāpēc n(n+1) vienmēr ir pāra skaitlis. Ja n - pāra, tad $n^2 + 1$ ir nepāra, bet $3n^3 - 2$ ir pāra. Ja n- nepāra, tad $n^2 + 1$ ir pāra, bet $3n^3 - 2$ ir nepāra. Tātad vienmēr ir 2 pāra skaitļi.

9.2. Ja $a^3 + ad = b^3 + bd$, tad $(a^3 - b^3) + d(a - b) = 0$ jeb $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + d) = 0$. Tā kā $a - b \neq 0$, tad $a^2 + ab + b^2 = -d$. Līdzīgi iegūst $a^2 + ac + c^2 = -d$ (izmantojot $a-c\neq0$). No vienādības

$$a^2 + ab + b^2 = c^2 + ac + c^2 \text{ seko}$$
$$b^2 - c^2 + a(b - c) = 0 \text{ jeb } (b - c)(a + b + c) = 0.$$

Tā kā $b - c \neq 0$, tad $a + b + c = 0$.

9.3.



2.zīm.

Pagarināsim BC_1 un BA_1 līdz krustpunktiem C_2 resp. A_2 ar taisni AC. Tā kā trijstūrī BCC_2 nogrieznis CC_1 ir gan bisektrise, gan augstums, tad tas ir vienādsānu trijstūris; tāpēc $CC_2 = BC$. Līdzīgi $AA_2 = AB$. Bez tam C_1 un A_1 ir BC_2 resp. BA_2 viduspunkti, tāpēc A_1C_1 ir ΔA_2BC_2 viduslīnija. Atliek ievērot, ka $C_2A_2 = CC_2 + AA_2 - AC = BC + AB - AC$, tātad $2A_1C_1 = BC + AB - AC$, k.b.j..

Pilnīgā risinājumā jāaplūko arī gadījumi, kad abi punkti A_2 un C_2 pieder malai AC vai arī abi atrodas ārpus tās.

9.4. Ievērosim, ka 1+2+...+10 = 55. Tāpēc

a) skaitli 1 var iegūt, ņemot $a_1 = a_2 = ... = a_{10} = 55$,

b) skaitli 55 var iegūt, ņemot $a_1 = a_2 = ... = a_{10} = 1$,

c) skaitli 56 nevar iegūt, jo vislielākā vērtība iegūstama ar vismazākajiem saucējiem, un tā ir 55,

d) ņemot $a_6 = 1$ un citus $a_i = 49$ $(i \neq 6)$, iegūstam summu

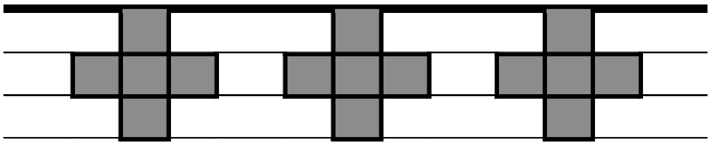
$$\frac{1+2+3+4+5+7+8+9+10}{49} + \frac{6}{1} = \frac{49}{49} + \frac{6}{1} = 7$$

e)

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{1}+\frac{4}{4}+\frac{5}{5}+\frac{6}{6}+\frac{7}{7}+\frac{8}{1}+\frac{9}{1}+\frac{10}{1} = 1+1+3+1+1+1+1+8+9+10 = 36$$

Piezīme: var pierādīt, ka formā $\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+...+\frac{n}{a_n}$ var izsacīt visus naturālos skaitļus no $\left[1;\frac{n(n+1)}{2}\right]$ un nekādus citus.

9.5. "Krusti" nevar saturēt kvadrāta stūra rūtiņas, un pie katras malas var pieskarties augstākais divi krusti (citādi šai malai blakus esošā "rūtiņu līnijā" jābūt vismaz 9 rūtiņām - pretruna).

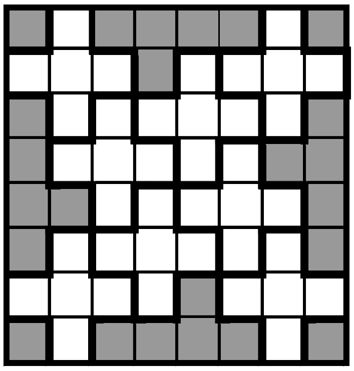


¤9 rūtiņas

3.zīm.

Tāpēc bez stūra rūtiņām krustos nevar ietilpt arī vēl ≥ 4 citas rūtiņas pie katras malas. Tāpēc krustos neietilpst ≥4·4 + 4 = 20 rūtiņas, un tajos ietilpst ≤64-20=44 rūtiņas.

Tā kā katrs krusts satur 5 rūtiņas un 9·5 = 45 > 44, tad nevar ievietot vairāk par 8 krustiem. Astoņu krustu ievietojumu skat. 4.zīmējumā.



4.zīm.

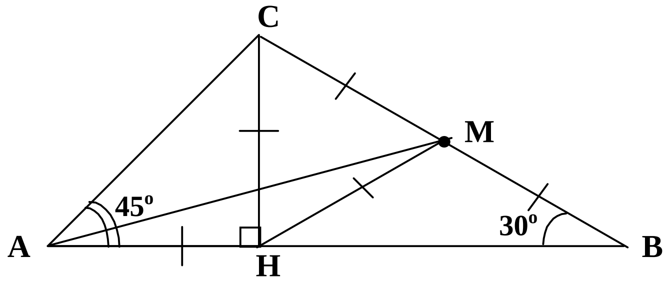
10.1 Ja a = 0, tad vienādojumam ir divas vienādas saknes, tāpēc a ≠ 0. Tā kā x_2 ir sakne, tad $x_2^2 - 2ax_2 - a = 0$ un $x_2^2 = 2ax_2 + a$. Tāpēc

$$2ax_1 + x_2^2 = 2ax_1 + 2ax_2 + a = 2a(x_1 + x_2) + a = 2a \cdot 2a + a = 4a^2 + a > a.$$

10.2 Sadalot visus skaitļus 15; 14; 13; ...; 3; 2 pirmskaitļu reizinājumā, kopā ir 11 divnieki, 6 trijnieki, 3 piecinieki, 2 septītnieki un pa vienam reizinātājam 11 un 13. Lai kā arī saliktu iekavas, tie kaut kā sadalīsies starp skaitītāju un saucēju, pie tam gan divnieku, gan piecinieku, gan 11 un 13 vai nu skaitītājā, vai saucējā būs vairāk. Lai izteiksmes vērtība būtu naturāls skaitlis, tiem jābūt vairāk skaitītājā. Arī trijniekiem un septītniekiem jāsadalās vai nu vienādi, vai jābūt vairāk skaitītājā. Tāpēc iegūstamā naturālā vērtība nevar būt mazāka par 2·5·11·13=1430. To, ka vērtība 1430 ir iegūstama, parāda piemērs

15 : (14 : 13 : 12 : 11: 10) : (9 : 8 : 7) : 6 : 5 : (4 : 3) : 2 = 1430.

10.3



5.zīm.

Novelkam augstumu CH un savienojam H ar M. Tad ΔAHC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, tāpēc AH = HC. Tā kā $\angle CBA = 30^0$, tad BC=2HC; tātad MC = MH = MB = CH = HA.

Tāpēc ΔCHM ir regulārs un $\angle CHM = 60^o$; tāpēc $\angle AHM = 90^o + 60^o = 150^o$. No vienādsānu trijstūra AHM seko

$\angle AMH = 15^o$. Tāpēc $\angle AMC = \angle HMC - \angle AMH = 60^o - 15^o = 45^o$.

10.4

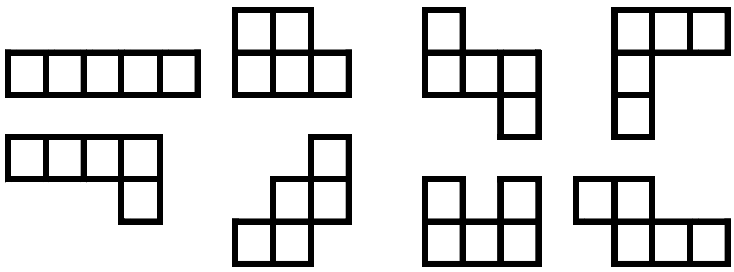
a) nevienādība tieši seko no acīmredzama fakta

$$\frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(x-z)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 \geq 0$$

b) pieņemsim no pretējā, ka $x^2 + y^2 + z^2 < xyz$.

Tad $x^2 < xyz$, tātad $x<yz$. Līdzīgi $y<xz$ un $z<xy$. Tāpēc $x + y + z < xy + xz + yz$. Saskaņā ar a) punktu no šejienes seko, ka $x+y+z < x^2 + y^2 + z^2$, un saskaņā ar pieņēmumu no šejienes seko, ka $x + y + z < xyz$ - pretruna ar doto.

10.5 Visi vienā krāsa nokrāsotie apgabali ir kādā no zīmējumā parādītajām 8 formām (tās iegūtas ar pilno pārlasi):



6.zīm.

Viegli pārliecināties: projicējot katru no šiem 8 apgabaliem uz kvadrāta divām neparalēlām malām, projekciju kopgarums ir vismaz 5.

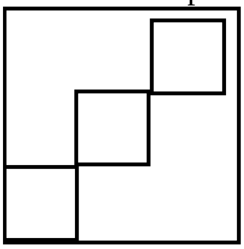
Projicēsim visus 13 apgabalus uz kvadrāta divām neparalēlām malām. Projekciju kopgarums ir vismaz $13\cdot 5 = 65$. Abu malu kopgarums ir $16 + 16 = 32$. Tā kā $65> 32\cdot 2$, tad vismaz vienā vietā projicēsies ≥ 3 apgabali. Atbilstošā rūtiņu rinda vai kolonna saturēs vismaz 3 krāsu rūtiņas.

Ja izmantotas tikai 12 krāsas, uzdevuma apgalvojums nepaliek spēkā. Aplūkosim sekojošu zīmējumu:

1	**1**	**2**	**2**	**2**
1	**1**	**2**	**2**	
1	**3**			
3	**3**	**4**	**4**	
3	**3**	**4**	**4**	**4**

7. z īm.

Katra rūtiņu rinda (kolonna) te satur augstākais divu krāsu rūtiņas. Novietojot 16x16 kvadrāta iekšienē trīs šādus kvadrātus "pa diagonāli",



8.zī m.

iegūstam vajadzīgo izvietojumu 12 apgabaliem.

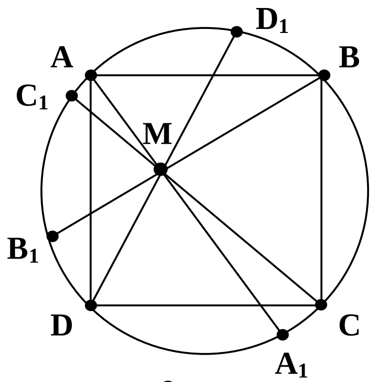
11.1 Tā kā $a_{2000} \le 20$, tad $\sqrt{a_{2000}} < 5$. Tāpēc $a_{1999} + \sqrt{a_{2000}} < 25$. Tāpēc $\sqrt{a_{1999} + \sqrt{a_{2000}}} < 5$. Tāpēc $a_{1998} + \sqrt{a_{1999} + \sqrt{a_{2000}}} < 25$, utt. Formālā spriedumā var lietot matemātisko indukciju.

11.2 Ja $n \in N$, varam paņemt $a = n^2$ un $b = n$; tad $a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b} = n^2$.

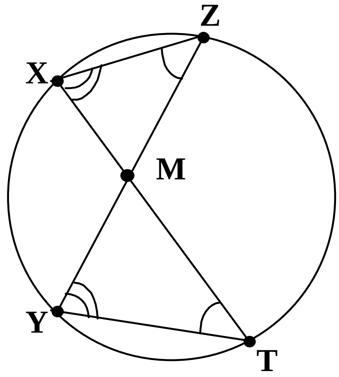
Pieņemsim, ka $a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b} \in N$; tad arī skaitlis $a\left(a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}\right) = a^2 + b - \frac{a}{b} \in N$. Tāpēc a dalās ar b un $a = n \cdot b$. Iegūstam, ka

$a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b} = nb + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{b}\right)$ ir naturāls skaitlis. Ja $n = 1$, tad jābūt arī $b = 1$ un otrādi; tad apskatāmās izteiksmes vērtība ir $1 = 1^2$. Ja $n>1$ un $b>1$, tad $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{b}\right| < 1$; lai $nb + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{b}\right)$ būtu naturāls skaitlis, jābūt $n = b$, un tad izteiksmes $a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}$ vērtība ir $n \cdot b + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{b}\right) = n^2$.

11.3



9.zīm.



10.zīm.

No ievilktu leņķu īpašībām seko, ka ΔXMZ ~ ΔYMT (10.zīm.), tāpēc $\frac{XZ}{YT} = \frac{XM}{YM} = \frac{ZM}{TM}$. No šejienes iegūstam (skat. 9.zīm.)

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{MB_1}{MA} \qquad (1)$$

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{MB_1}{MC} \qquad (2)$$

$$\frac{C_1D_1}{CD} = \frac{MD_1}{MC} \qquad (3)$$

$$\frac{D_1A_1}{DA} = \frac{MD_1}{MA} \qquad (4)$$

No (1) un (3) sareizinot iegūstam $\frac{A_1B_1}{AB} \cdot \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{MB_1}{MA} \cdot \frac{MD_1}{MC}$; līdzīgi no (2) un (4) iegūstam $\frac{B_1C_1}{BC} \cdot \frac{D_1A_1}{DA} = \frac{MB_1}{MC} \cdot \frac{MD_1}{MA}$.

Tāpēc $\frac{A_1B_1}{AB} \cdot \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{B_1C_1}{BC} \cdot \frac{D_1A_1}{DA}$. Tā kā AB = BC = CD = DA, no šejienes seko vajadzīgais.

11.4 Lemma. Ja katri 2 no sešiem punktiem savienoti ar baltu vai sarkanu līniju, tad eksistē 3 tādi punkti, kas visi savā starpā savienoti ar vienas un tās pašas krāsas līnijām.

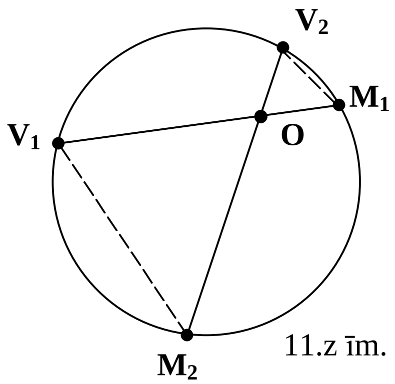
Pierādījums. Ņemam vienu punktu A. No tā iziet vismaz 3 līnijas vienā krāsā; pieņemsim, ka līnijas AM, AN un AK ir baltas. Ja kaut viena no līnijām MN, MK, NK ir balta, iegūstam baltu trijstūri; ja tās visas ir sarkanas, iegūstam sarkanu trijstūri MNK. Lemma pierādīta.

Attēlosim tagad dotos 6 iracionālos skaitļus ar punktiem, Savienosim divus punktus ar baltu līniju, ja attiecīgo skaitļu summa ir racionāls skaitlis, un ar sarkanu, ja tā ir iracionāls skaitlis. Saskaņā ar lemmu eksistē "vienkrāsains" trijstūris. Pierādīsim, ka tas nevar būt balts. Tiešām, ja $\alpha+\beta = c$, $\alpha + \gamma = b$ un $\beta + \gamma = a$ (a, b, c - racionāli), tad $\alpha = \frac{c+b-a}{2}$ - racionāls skaitlis, un tā ir pretruna. Tātad "vienkrāsainais" trijstūris ir sarkans, kas dod vajadzīgos 3 skaitļus.

11.5 Sauksim skaitļus 1; 2; 3; ...; 25 un 76; 77; ...; 100 par malējiem, bet skaitļus 26; 27; ...; 74; 75 par vidējiem. Aplūkosim visus iespējamos 50 hordu komplektus, kur katra horda savieno vienu vidējo un vienu malējo skaitli un katrs skaitlis ir ar kādu savienots; šādu komplektu ir galīgs skaits. Izvēlēsimies komplektu ar vismazāko hordu garumu summu (ja tādi ir vairāki, tad ņemam jebkuru no tiem). Mēs apgalvojam, ka nekādas divas hordas nekrustojas. Tiešām, ja tās krustotos (skat. 11.zīm.), tad

$$V_1M_1+V_2M_2 = V_1O + OM_1 + V_2O + OM_2 =$$
$$=(V_1O + OM_2) + (V_2O + OM_1) > V_1M_2 + V_2M_1,$$

un tā ir pretruna ar hordu komplekta garumu summas minimalitāti.



11.z īm.

Atliek ievērot, ka starpība starp malējo un vidējo skaitli nav lielāka par 74.

12.1 Doto vienādību pārveidojam par

$(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta - \sin^2\beta) = 0$ un tālāk par

$\cos2\alpha + \cos2\beta = 0$

$2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = 0$

Ja α un β ir šauri leņķi, tad $|\alpha - \beta|<90^o$ un $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$.

Tāpēc $\cos(\alpha + \beta) = 0$, $\alpha+\beta = 90^o + 180^o\cdot n$, $n\in Z$. Tā kā α, β - šauri leņķi, tad der tikai $\alpha + \beta = 90^o$.

Iespējami daudzi citi risinājumi.

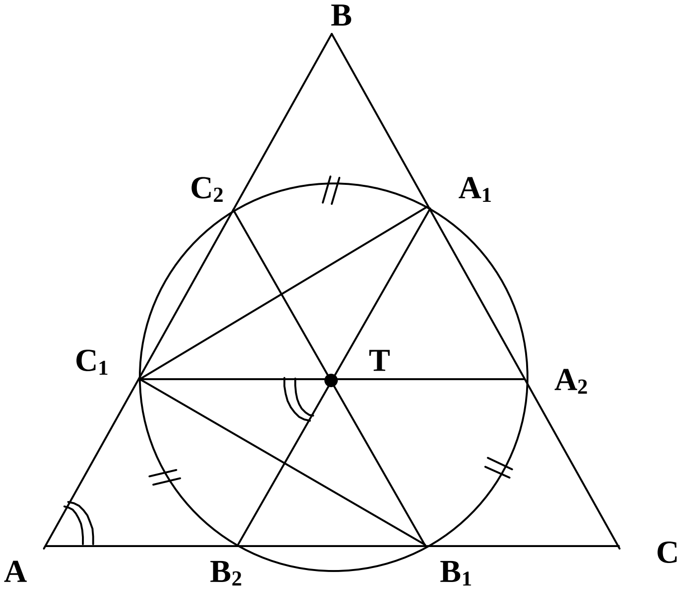
12.2

a) acīmredzami, der $x = y = z = 1$

b) meklēsim atrisinājumus, kur $x = y = z$. Tad sistēma ekvivalenta ar vienādojumu $x^3 - 2x + 1 = 0$ jeb ar $(x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$. No šejienes iegūstam atrisinājumus $x = y = z = 1$ un $x = y = z = \dfrac{-1\mp\sqrt{5}}{2}$.

c) ja $x<y$, tad $x^3<y^3$; tāpēc no 1. un 2. vienādojuma seko $y<z$. Līdzīgi no 2. un 3. vienādojuma seko $z<x$. Nevienādības $x<y<z<x$ dod pretrunu. Līdzīgi pretrunu iegūst, ja pieņem, ka $x>y$. Tāpēc jābūt $x = y$; tad no 1. un 2. vienādojuma $y = z$, un esam nonākuši pie b) gadījuma.

12.3



12.zīm.

a) Tā kā loki starp paralēlām hordām ir vienādi, tad $\cup C_2A_1 = \cup A_2B_1 = \cup B_2C_1$ (12.zīm.) Tāpēc $\angle A_1C_1B_1 = \frac{1}{2}(\cup A_1A_2 + \cup A_2B_1)$

$= \frac{1}{2}(\cup A_1A_2 + \cup C_1B_2) = \angle C_1TB_2$.

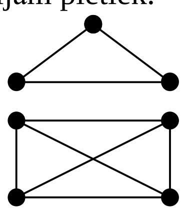
Tā kā AC_1TB_2 ir paralelograms, tad $\angle A_1C_1B_1 = \angle C_1AB_2 = \angle BAC$. Līdzīgi pierāda, ka $\angle C_1A_1B_1 = \angle ABC$. Prasītā līdzība seko no pazīmes ***ll***.

b) tāpat kā a) pierāda, ka $\Delta A_2B_2C_2$ ir līdzīgs ar ΔABC. Tāpēc $\Delta A_1B_1C_1$ un $\Delta A_2B_2C_2$ ir līdzīgi savā starpā. Tā kā tiem ir vienādi apvilktās riņķa līnijas rādiusi (tie ir ievilkti vienā un tai pašā riņķa līnijā), tad tie ir vienādi savā starpā.

12.4 Komisijas locekļus attēlosim ar punktiem, bet sarokošanos - ar līniju starp atbilstošajiem punktiem.

Parādīsim, ka meklētais minimums ir 9.

A. Kā redzams 13.zīm., ar 9 līnijām pietiek.



13. zīm.

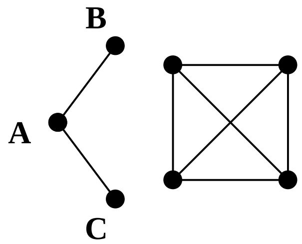
Tiešām, no jebkuriem 3 punktiem divi atrodas vienā daļā, un tie ir savā starpā savienoti.

B. Pieņemsim, ka novilktas 8 līnijas. Tad ir 16 līniju gali. Tā kā $7 \cdot 3 = 21 > 16$, tad eksistē punkts, no kura iziet ne vairāk kā 2 līnijas. Tālāk šķirojam iespējas.

B1) no šī punkta neiziet neviena līnija. Tad visiem citiem punktiem jābūt pa pāriem savienotiem, un tad līniju ir $C_6^2 = 15$ - pretruna.

B2) no šī punkta - sacīsim, A - iziet viena līnija uz punktu B. Tad A nav savienots ar 5 citiem punktiem. Visiem šiem 5 punktiem jābūt pa pāriem savienotiem, tātad līniju ir $1+C_5^2=11$ - pretruna.

B3) no šī punkta, sacīsim, no A, iziet 2 līnijas. Tad A nav savienots ar 4 citiem punktiem. Visiem šiem punktiem jābūt pa pāriem savienotiem. Tas jau dod $2+C_4^2=8$ līnijas, tātad citu līniju vairs nav.



Skaidri redzams, ka trīs nesavienotus punktus var izvēlēties 4 veidos: B, C un jebkurš punkts no "četrinieka". Iegūta pretruna.

12.5

a) pieņemsim no pretējā, ka izdevies izvēlēties 5 skaitļus, kas ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi; apzīmēsim tos ar a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Šo skaitļu MKD ir $a_1a_2a_3a_4a_5$, tāpēc jebkuru piecu skaitļu MKD ir $a_1a_2a_3a_4a_5$. Apzīmēsim ar y patvaļīgu no mūsu 12 skaitļiem, kas nav ne a_1, ne a_2, ..., ne a_5. Apskatīsim 5 skaitļus y, a_2, a_3, a_4, a_5. To MKD noteikti satur reizinājumu $a_2a_3a_4a_5$ un vēl tos pirmreizinātājus, kas jāpievieno, lai šis MKD dalītos ar y. No otras puses, šis MKD ir $(a_2a_3a_4a_5)\cdot a_1$. Tāpēc a_1 noteikti ieiet kā reizinātājs skaitlī y, tātad y dalās ar a_1. Līdzīgi pierāda, ka y dalās ar a_2, ..., ar a_5; tā kā a_1, ..., a_5 ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi, tad y dalās ar $a_1a_2a_3a_4a_5$. Tāpēc $y\geq a_1a_2a_3a_4a_5$. No otras puses, MKD(y, a_2, ..., a_5) = $a_1a_2a_3a_4a_5$, tāpēc $a_1a_2a_3a_4a_5$ dalās ar y un tātad $a_1a_2a_3a_4a_5\geq y$. Tāpēc $y = a_1a_2a_3a_4a_5$. Iznāk, ka <u>katrs</u> mūsu kopas skaitlis, kas nav a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ir vienāds ar $a_1a_2a_3a_4a_5$. Tā ir pretruna.

b) pieņemsim, ka p_1, p_2, ..., p_8 ir dažādi pirmskaitļi. Apskatām skaitļus

p_1, p_2, p_3, $p_4p_5p_6p_7p_8$,

kā arī visus šo 8 pirmskaitļu reizinājumus pa 7. Kopā mums ir 4 + 8 = 12 skaitļi; pirmie 4 no tiem ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi. Aplūkosim patvaļīgus 5 no šiem 12 skaitļiem. Ja starp tiem ir vismaz divi "reizinājumi pa 7", tad ar to jau pietiek, lai MKD būtu $p_1p_2...p_7p_8$. Ja "reizinājums pa 7" starp tiem ir tikai viens, tad pārējie 4 skaitļi ir p_1, p_2, p_3, $p_4p_5p_6p_7p_8$, un atkal MKD ir $p_1p_2...p_7p_8$. Tātad visi uzdevuma nosacījumi izpildīti.