Latvijas 50. matemātikas olimpiādes 3. kārtas uzdevumi

9. klase

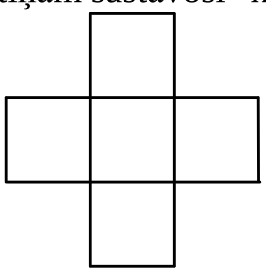
1. Dots, ka n - vesels skaitlis. Cik daudzi no skaitļiem n^2+1, $n(n+1)$ un $3n^3-2$ ir pāra skaitļi?

2. Skaitļi a, b, c visi ir dažādi. Bez tam eksistē tāds skaitlis d, ka $a^3+ad=b^3+bd=c^3+cd$. Pierādīt, ka $a+b+c=0$.

3. No trijstūra ABC virsotnes B novilkti perpendikuli pret trijstūra leņķu A un C bisektrisēm; šo perpendikulu pamati ir attiecīgi A_1 un C_1. Pierādīt, ka $2 \cdot A_1C_1 = AB+BC-AC$.

4. Kurus no skaitļiem 1; 55; 56; 7; 36 var izsacīt formā $\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\ldots+\frac{10}{a_{10}}$, kur $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ - naturāli skaitļi, starp kuriem var būt arī vienādi?

5. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. To sagrieza daļās pa rūtiņu līnijām. Kāds lielākais skaits iegūto daļu var būt no 5 rūtiņām sastāvoši "krusti" (skat. 1. zīm)?



1. zīm.

10. klase

1. Vienādojumam $x^2-2ax-a=0$ ir divas dažādas reālas saknes x_1 un x_2. Pierādīt, ka $2ax_1+x_2^2>a$.

2. Kādu mazāko naturālo skaitli var iegūt kā vērtību, ievietojot iekavas izteiksmē 15:14:13:12:11:10:9:8:7:6:5:4:3:2?

3. Trijstūrī ABC zināms, ka $\angle CAB=45°$ un $\angle CBA=30°$. Punkts M ir malas BC viduspunkts. Aprēķināt $\angle AMC$.

4. Dots, ka x, y, z - pozitīvi skaitļi.
   a) pierādīt, ka $x^2+y^2+z^2 \geq xy+xz+yz$,
   b) pieņemsim, ka $x+y+z \geq xyz$. Pierādīt, ka $x^2+y^2+z^2 \geq xyz$.

5. Kvadrāts sastāv no 16×16 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā no 13 krāsām nokrāsotas tieši 5 rūtiņas, pie tam katrai krāsai šīs 5 rūtiņas var apzīmēt ar burtiem a, b, c, d, e tā, ka rūtiņām a un b, b un c, c un d, d un e ir pa kopējai malai. Pierādiet, ka kādā rūtiņu rindā vai kādā rūtiņu kolonnā sastopamas vismaz 3 dažādas krāsas. Vai uzdevuma apgalvojums paliek spēkā, ja pavisam izmantotas tikai 12 dažādas krāsas?

11. klase

1. Dots, ka $0 \le a_1, a_2, \dots, a_{2000} \le 20$. Pierādīt, ka
$$\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\dots+\sqrt{a_{1999}+\sqrt{a_{2000}}}}}} < 5.$$

2. Dots, ka a un b - naturāli skaitļi. Ir zināms arī, ka izteiksmes $a+\frac{b}{a}-\frac{1}{b}$ vērtība ir naturāls skaitlis. Pierādīt, ka šīs izteiksmes vērtība ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts. Vai jebkuram naturālam *n* var atrast tādus naturālus *a* un *b*, ka $a+\frac{b}{a}-\frac{1}{b}=n^2$?

3. Riņķa līnijā ievilkts kvadrāts ABCD. Tā iekšpusē ņemts punkts M. Stari AM, BM, CM, DM krusto riņķa līniju atbilstoši punktos A_1, B_1, C_1, D_1. Pierādīt, ka $A_1B_1 \cdot C_1D_1 = A_1D_1 \cdot B_1C_1$.

4. Doti seši dažādi iracionāli skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties 3 skaitļus (apzīmēsim tos ar x, y, z) tā, ka visi trīs skaitļi $x+y$, $x+z$, $y+z$ ir iracionāli.

5. Uz riņķa līnijas atzīmēti 100 punkti. Tiem pierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 100 (katram punktam cits skaitlis). Pierādīt, ka visus punktus var pa pāriem savienot ar 50 hordām tā, ka nekādām divām hordām nav kopīgu punktu un katras hordas galos ierakstīto skaitļu starpība nepārsniedz 74 (no lielākā skaitļa atņemam mazāko).

12. klase

1. Dots, ka α un β ir šauri leņķi un $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\cos^2\alpha+\cos^2\beta$. Pierādīt, ka $\alpha+\beta=90°$.

2. Aplūkosim vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x^3 = 2y-1 \\ y^3 = 2z-1 \\ z^3 = 2x-1 \end{cases}$

   a) atrast vienu tās atrisinājumu reālos skaitļos,
   b) atrast trīs tās atrisinājumus reālos skaitļos,
   c) pierādīt, ka sistēmai nav vairāk par trim atrisinājumiem reālos skaitļos.

3. Trijstūra ABC iekšpusē ņemts punkts T. Caur to novilktas taisnes paralēli ABC malām. Šo taišņu krustpunkti ar ABC malām atrodas uz vienas riņķa līnijas. Trijstūra ABC virsotnes un minētie 6 krustpunkti uz ABC kontūra atrodas secībā A, C_1, C_2, B, A_1, A_2, C, B_1, B_2.
   a) pierādīt, ka trijstūris $C_1A_1B_1$ līdzīgs trijstūrim ABC,
   b) pierādīt, ka trijstūri $A_1B_1C_1$ un $A_2B_2C_2$ ir savā starpā vienādi.

4. Komisijā ir 7 cilvēki. Ierodoties uz sēdi, daži no viņiem sarokojas. Kāds ir mazākais iespējamais sarokošanos skaits, lai no katriem trim komisijas locekļiem varētu atrast divus, kas savā starpā sarokojušies?

5. Doti 12 dažādi naturāli skaitļi. Katriem 5 no tiem mazākais kopīgais dalāmais ir viens un tas pats skaitlis M. Ir zināms, ka no dotajiem 12 skaitļiem var izvēlēties *x* skaitļus tā, ka katri divi no izvēlētajiem ir savstarpēji pirmskaitļi.
   a) pierādīt, ka $x \le 4$,
   b) pierādīt: var gadīties, ka $x=4$.