LATVIJAS 51. MATEMĀTIKAS OLIMPIĀDES
3. kārtas uzdevumi

9. klase

1. Sienāža lēciena garums ir 5. Viņš sākotnēji atrodas punktā ar koordinātām (0;0) un var pārvietoties tikai pa punktiem, kam abas koordinātas ir veseli skaitļi.
   a) Pierādīt, ka sienāzis var nokļūt punktā ar koordinātām (1;0),
   b) vai sienāzis var nokļūt jebkurā punktā ar veselām koordinātām?

2. Naturāla skaitļa A ciparus uzrakstīja pretējā secībā un ieguva skaitli B. Izrādījās, ka B dalās ar A. Kāds var būt dalījums?

3. Punkta O attālumi līdz izliekta četrstūra virsotnēm ir a; b; c; d, pie tam $a<b<c<d$. Kāds ir lielākais iespējamais četrstūra laukums?

4. Dots, ka x un y ir dažādi pozitīvi skaitļi un $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=a$.

   Aprēķināt $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

5. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām; n rūtiņās atzīmēts pa krustiņam. Vai noteikti var nokrāsot 4 rindas un 4 kolonnas tā, lai visi krustiņi būtu nokrāsoti, ja
   a) n=12,
   b) n=13?

10. klase

1. Dots, ka *a*, b, c - reāli skaitļi. Cik daudzas no nevienādībām $a^2+ab>2c^2$, $b^2+bc>2a^2$, $c^2+ca>2b^2$ var būt pareizas vienlaicīgi?

2. Pierādiet, ka jebkuru trijstūri var sagriezt
   a) 2000 vienādsānu trijstūros,
   b) 2001 vienādsānu trijstūrī.

3. Dots, ka P(x) un Q(x) ir kvadrāttrinomi. Zināms, ka vienādojumam P(Q(x))=0 ir četras saknes; trīs no tām ir 3; 15; 2001. Atrast ceturto šī vienādojuma sakni.

4. Četrstūris ABCD ir ievilkts riņķī ar diametru BD. Punkts X ir simetrisks punktam A attiecībā pret BD; taisnes AX un BD krustojas punktā Y. Taisne *t*, kas iet caur Y un paralēla AC, krusto CD un BC atbilstoši punktos P un Q. Pierādiet, ka punkti P; C; Q; X ir taisnstūra virsotnes.

5. Kādiem naturāliem skaitļiem *n* piemīt sekojoša īpašība: nosvītrojot skaitļa 2^n pirmo ciparu, iegūst divnieka pakāpi ar naturālu kāpinātāju?

11. klase

1. Pierādīt, ka $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$.

2. Vai eksistē funkcija $f(x)$, kas vienlaicīgi apmierina šādus nosacījumus:
   a) $f(x)$ definēta visiem reāliem x,
   b) $f(x)$ vērtības ir reāli skaitļi,
   c) katram reālam x pastāv sakarība $f(x^2) - \left(f(x)\right)^2 \geq \frac{1}{4}$,
   d) ja $x \neq y$, tad $f(x) \neq f(y)$?

3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^2+3^x=y^2$.

4. Četrstūris ABCD ir ievilkts riņķī; tā diagonāles krustojas punktā X. Malu AB un CD viduspunkti ir atbilstoši M un N. Pierādiet, ka taisnes, kas caur punktiem X, M un N vilktas perpendikulāri atbilstoši pret AD, BD un AC, krustojas vienā punktā.

5. Dažas rūtiņu lapas rūtiņas nokrāsotas zaļas, dažas - sarkanas. Ir zināms: lai kā arī mēs nokrāsotu 1. zīm. attēloto no četrām rūtiņām sastāvošo kvadrātu A (katru rūtiņu - sarkanā vai zaļā krāsā), rūtiņu lapā varēs atrast kvadrātu, kas nokrāsots tieši tāpat kā A un novietots lapā tāpat kā A (piem., kvadrāti 2. zīm. nav novietoti vienādi!) Kāds ir mazākais iespējamais rūtiņu lapā nokrāsoto rūtiņu daudzums?

A

1. zīm.

S	S
Z	S

Z	S
S	S

2. zīm.

12. klase

1. Pierādīt, ka patvaļīgiem leņķiem α, β un γ ir pareiza nevienādība $14+4\cos(\alpha-\beta)+6\cos(\alpha-\gamma)+12\cos(\beta-\gamma)\geq 0$.

2. Telpā caur vienu punktu novilktas *n* taisnes. Tās visas pa pāriem savā starpā veido vienādus leņķus. Kāda ir lielākā iespējamā *n* vērtība?

3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^2-y!=2001$. (Piezīme: ar $y!$ saprot visu naturālo skaitļu reizinājumu no 1 līdz y ieskaitot.)

4. Riņķa līnijas ω_1 un ω_2, kuru centri ir atbilstoši O_1 un O_2, krustojas punktos A un B. Stari O_1B un O_2B krusto atbilstoši ω_2 un ω_1 punktos E un F. Taisne, kas caur B vilkta paralēli EF, krusto ω_1 un ω_2 atbilstoši vēl punktos M un N. Pierādīt, ka
   a) A, O_1, O_2, E, F atrodas uz vienas riņķa līnijas,
   b) MN=AE+AF.

5. Profesora Cipariņa kopoto rakstu 10 sējumi atrodas plauktā vienā rindā. Ar vienu gājienu atļauts paņemt jebkuru daudzumu blakus stāvošu sējumu (varbūt vienu pašu sējumu) un tai pašā secībā, neapgriežot otrādi, novietot jebkurā vietā plauktā (vienā galā, otrā galā vai starp diviem plauktā palikušiem sējumiem). Profesors Cipariņš grib pārkārtot sējumus apgrieztā secībā. Atrodiet iespējami mazu naturālu skaitli *x* un iespējami lielu naturālu skaitli *y* ar īpašību:
   a) Cipariņš var sasniegt savu mērķi ar *x* gājieniem,
   b) Cipariņš nevar sasniegt savu mērķi ar *y* gājieniem.