9.1. Vispirms parādīsim, ka katrs 6-ciparu simetrisks skaitlis dalās ar 11. Tiešām,

$$\overline{abccba} = a\cdot 10^5 + b\cdot 10^4 + c\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + b\cdot 10 + a =$$
$$= a\cdot 100001 + b\cdot 10010 + c\cdot 1100 =$$
$$= a\cdot 11\cdot 9091 + b\cdot 910\cdot 11 + c\cdot 11\cdot 100$$

Tāpat skaidrs, ka visi skaitļi dalās ar 1. Tātad iespējamas vērtības $x = 1$ un $x = 11$.
Ievērosim, ka 999999 = 11· 90909 un 100001 = 11·9091. Tā kā 9091·10 - 90909 = 1, tad abu skaitļu 9091 un 90909 vienīgais kopējais naturālais dalītājs ir 1. Tāpēc **simetriskajiem** skaitļiem 999999 un 100001 vienīgie kopējie naturālie dalītāji ir 1 un 11. Tātad x nav iespējamas citas vērtības kā 1 un 11.

9.2. a) var gadīties, ka nē. Piemēram, Andris var izvēlēties skaitļus

1÷11, 23 ÷33, 45 ÷55, 67÷77 un 89÷99.

b) jā, noteikti. Sadalām naturālos skaitļus no 1 līdz 99 piecās grupās:

1, 2, 3, …………, 23, 24

25, 26, …………, 47, 48

49, 50, …………, 71, 72

73, 74, …………, 95, 96

97, 98, 99.

No Andra izvēlētajiem skaitļiem vismaz 52 skaitļi atrodas pirmajās 4 rindās. Tā kā

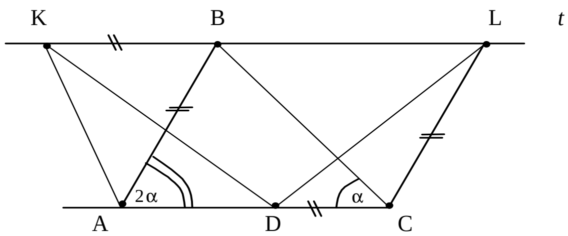
$$4\cdot 12 = 48 < 52,$$

tad kādā no šīm rindām atrodas 13 vai vairāk skaitļu. Ja tā ir rinda

a+1, a+2, a+3, … , a+24 (kur a ir 0; 24; 48 vai 72),

apskatām 12 pārus (a+1, a+13), (a+2, a+14), (a+3, a+15), … , (a+12, a+24).
Vismaz viens no šiem pāriem satur 2 izvēlētos skaitļus, jo 13>12. Tie ir meklētie.

9.3. Apzīmējam ∠ACB = α, tad ∠BAC = 2α.



Tad ∠KBA = ∠BAC = 2α un $\angle KAB = \frac{1}{2}\left(180^o - 2\alpha\right) = 90^o - \alpha$, tāpēc arī ∠BKA = 90° - α.

Tātad ΔKBA – vienādsānu un AB = KB. Tāpēc KBCD ir paralelograms.
Tāpēc ∠BKD = ∠BCA = α. Tā kā ABLC – paralelograms, tad ∠DCL = 180°-2α.
Tā kā DC = AB = CL, tad ΔDCL -vienādsānu, kur CD = CL.

Tāpēc tā leņķi pie pamata ir $(180° - (180° - 2\alpha)) \cdot \frac{1}{2} = \alpha$.

Tā kā ∠BLC = 2α un ∠DLC = α, tad ∠BLD = α.
Tātad ΔKDL ir vienādsānu, jo ∠BKD = α = ∠BLD. No šejienes seko vajadzīgais.

9.4. Dotā vienādojuma saknes ir vienādojumu

$$x^2 - 2ax - 4a^2 - 4 = 0 \quad \textbf{(1)} \qquad \text{un}$$

$$x^2 - 4x - 2a^3 - 2a = 0 \quad \textbf{(2)} \qquad \text{saknes.}$$

Vienādojuma (1) diskriminants $D_1 = a^2 + 4a^2 + 4 = 5a^2 + 4 > 0$, tātad tam ir 2 dažādas reālas saknes. Tāpēc pastāv iespējas:

1) vienādojumam (2) ir viena sakne, kas nav vienādojuma (1) sakne. Tad jābūt $D_2 = 4 + 2a^3 + 2a = 0$, $a^3 + a + 2 = 0$, $(a + 1)(a^2 - a + 2) = 0$, no kurienes $a = -1$. Tad (1) un (2) pārveidojas par

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \qquad (1`)$$

$$x^2 - 4x + 4 = 1 \qquad (2`)$$

šiem vienādojumiem ir kopīga sakne $x = 2$, tāpēc vērtība $a = -1$ neder.

2) gan (1), gan (2) ir divas dažādas saknes, un viena no tām ir kopīga. Kopīgā sakne apmierina arī abu vienādojumu starpību

$$(2a - 4)x = 2a^3 + 2a - 4a^2 - 4$$

$$(2a - 4)x = 2a(a^2 + 1) - 4(a^2 + 1)$$

$$(a - 2)x = (a - 2)(a^2 + 1)$$

Ja $a = 2$, tad (1) un (2) sakrīt, tāpēc vērtība $a = 2$ neder. Tāpēc $x = a^2 + 1$. Ievietojam šo vērtību (1); iegūstam

$$(a^2 + 1)^2 - 2a(a^2 + 1) - 4a^2 - 4 = 0$$

$$a^4 - 2a^3 - 2a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a^2 + 1)(a^2 - 2a - 3) = 0$$

No šejienes $a^2 - 2a - 3 = 0$ un $a = -1$ (neder, kā parādīts iepriekš) vai $a = 3$. Pārbaude **(tā nepieciešama!)** parāda, ka vērtība $a = 3$ der: vienādojumi kļūst par

$$x^2 - 6x - 40 = 0 \qquad x_1 = 10;\ x_2 = -4$$

$$x^2 - 4x - 60 = 0 \qquad x_1 = 10;\ x_2 = -6.$$

9.5. Piemērs

5; -8; 5; 5; -8; 5; -8; 5; 5; -8; 5

parāda, ka prasītajā veidā var izvēlēties 11 skaitļus. Parādīsim, ka 12 skaitļus tā izvēlēties nevar. Pieņemsim no pretējā, ka

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_{11}, x_{12}$$

ir virkne, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Aplūkosim sekojošu tabulu:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem:

a) katrā rindā summa pozitīva, tāpēc arī visā tabulā skaitļu summa ir pozitīva,

b) katrā kolonnā skaitļu summa ir negatīva, tāpēc arī visā tabulā skaitļu summa ir negatīva.

Iegūta pretruna.

10.1. Ja $a=\frac{1}{5}$, tad vienādojums kļūst par $\frac{1}{|x-2|}=\frac{1}{|x-2|}$; tā atrisinājumu kopa ir $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$. Ja $a\neq\frac{1}{5}$, tad $2\neq 10a$. Tad vienādojums ekvivalents ar sistēmu

$$(*)\begin{cases}|x-2|=|x-10a|\\ x\neq 2, x\neq 10a\end{cases}$$

Tā kā $|a-b|$ ir attālums uz skaitļu ass starp punktiem a un b, tad sistēmas $(*)$ atrisinājumi ir tie skaitļu ass punkti, kas atrodas vienādos attālumos no punktiem 2 un 10a. Skaidrs, ka der tikai attiecīgā nogriežņa viduspunkts, t.i., $x=\frac{1}{2}(2+10a)=5a+1$.

10.2. Pie a = 1 un b = 6 iegūstam, ka pirmie **pieci** virknes locekļi ir pirmskaitļi:

$x_2 = 11$; $x_3 = 17$; $x_4 = 23$; $x_5 = 29$.

Pierādīsim, ka tas ir maksimums. Viegli pārbaudīt, ka

$$\begin{aligned}
x_1 &= 5;\\
x_2 &= 5a+b;\\
x_3 &= 5a^2+ab+b = 5a^2+(a+1)\cdot b;\\
x_4 &= 5a^3+\left(a^2+a+1\right)\cdot b;\\
x_5 &= 5a^4+\left(a^3+a^2+a+1\right)\cdot b;\\
x_6 &= 5a^5+\left(a^4+a^3+a^2+a+1\right)\cdot b.
\end{aligned}$$

Skaidrs, ka gan $x_5 > 5$, gan $x_6 > 5$. Ja a, dalot ar5, dod atlikumu 1, tad $a^4+a^3+a^2+a+1$, dalot ar 5, dod tādu pašu atlikumu kā $1^4+1^3+1^2+1+1=5$, t.i., dalās ar 5.

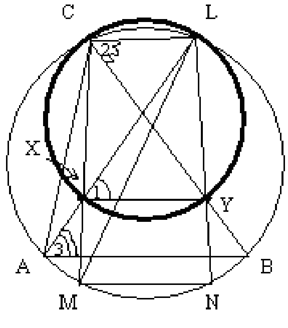
Tātad x_6 dalās ar 5. Tā kā $x_6 > 5$, tad x_6 nav pirmskaitlis.

Ja a, dalot ar 5, dod atlikumus 2; 3 vai 4, tad a^3+a^2+a+1 dalās ar 5, kā to parāda tiešs aprēķins:

$$2^3+2^2+2^1+1=15$$
$$3^3+3^2+3^1+1=40\ .$$
$$4^3+4^2+4^1+1=85$$

Tātad šajā gadījumā x_5 dalās ar 5. Tā kā $x_5 > 5$, tad x_5 nav pirmskaitlis.

10.3. Apzīmējam loka AMNB leņķisko lielumu ar α, bet loku AM un NB leņķiskos lielumus ar β (tie vienādi, jo AB||MN).



Tad no ievilkta leņķa īpašībām $\angle XLY = \angle ALN = \frac{1}{2} \cup AMN = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ un tāpat $\angle XCY = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Tāpēc $\angle XLY = \angle XCY$; tāpēc ap četrstūri XCLY var apvilkt riņķa līniju.

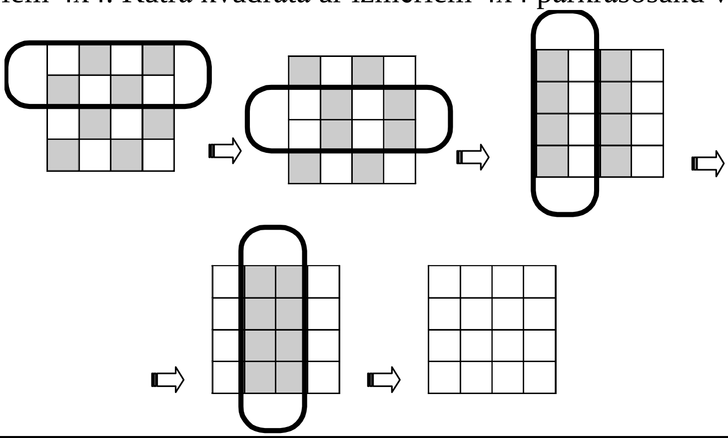
No šajā (jaunajā) riņķa līnijā ievilkto leņķu īpašībām seko, ka $\angle 1 = \angle 2$ (ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku). Līdzīgi $\angle 2 = \angle 3$ (spriežam par sākotnējā riņķa līnijā ievilktiem leņķiem). Tātad $\angle 1 = \angle 3$. Tā kā tie ir kāpšļu leņķi pie taisnēm XY un AB, kuras krusto AL, tad XY||AB||MN.

10.4. Pie n = 1 nekas nav jāmaina. Pie n = 2 var mainīt krāsas vienīgi uzreiz visā kvadrātā, tātad prasītais nav sasniedzams. Parādīsim, ka visos citos gadījumos uzdevuma prasības ir izpildāmas.

a) pieņemsim, ka n – nepāra skaitlis. Mainām krāsas 1., 3., 5., ..., n-jā kolonā (taisnstūros ar izmēriem 1xn). Tagad katra rinda ir vienkrāsaina, un, mainot krāsas 1., 3., 5., ..., n-jā rindā, panākam prasīto.

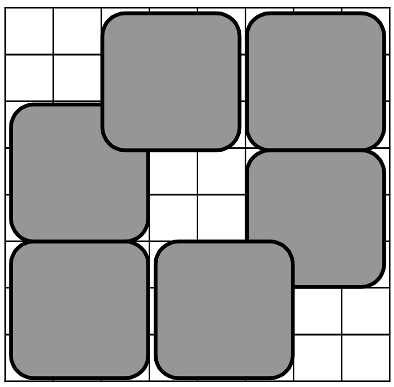
b) pieņemsim, ka n ir pāra skaitlis, kas nav divnieka pakāpe. Tad $n = 2^k \cdot a$, $a > 1$, a – nepāra. Sadalām doto kvadrātu mazākos kvadrātos ar izmēriem axa un katrā no šiem kvadrātiem rīkojamies, kā aprakstīts iepriekš.

c) n – divnieka pakāpe, t.i., $n = 2^k$, $k \geq 2$ (par kvadrātu 2x2 jau runājām). Sadalām doto kvadrātu kvadrātos ar izmēriem 4x4. Katrā kvadrātā ar izmēriem 4x4 pārkrāsošanu veicam sekojoši:



10.5. Sekojošais piemērs parāda, ka summa var būt 14. (rūtiņās, kas atstātas tukšas, ieraksta “-1”).

+1	+1	0	+1	+1	0	+1	+1
+1	+1		+1	+1		+1	+1
+1	+1	0	+1	+1	0	+1	+1
+1	+1		+1	+1		+1	+1
+1	+1	0	+1	+1	0	+1	+1
+1	+1		+1	+1		+1	+1



Pierādīsim, ka tā ir lielākā iespējamā vērtība.

Kvadrātā 8x8 ievietoti 6 kvadrāti ar izmēriem 3x3. Tā kā katrā tādā kvadrātā skaitļu summa ir 0, tad **visu** skaitļu summa ir A – B, kur A ir 12 ar kvadrātiem nepārklātajās rūtiņās esošo skaitļu summa, bet B ir abās divkārt pārklātajās rūtiņās esošo skaitļu summa. Atliek ievērot, ka neviens no šiem 14 skaitļiem pēc moduļa nepārsniedz 1.

11.1. No sistēmas viegli secināt, ka $x \geq 0$, $y \geq 0$ un $z \geq 0$, turklāt, ja viens no mainīgajiem ir 0, tad arī abi pārējie ir 0. Tāpēc vai nu $x = y = z = 0$ (šis atrisinājums der – pārbaude nepieciešama), vai arī visi skaitļi x, y, z ir pozitīvi. Apskatām otro gadījumu. Atņemot no pirmā vienādojuma otro, iegūstam

$$x^2 - z^2 = 2(z - x) \text{ jeb } (x - z)(x + z + 2) = 0$$

Tā kā $x + z + 2 > 0$, tad $x = z$. Līdzīgi iegūstam $z = y$. Tāpēc $x = y = z$, no kurienes viegli seko, ka

$$x = y = z = 0 \text{ vai } x = y = z = 1.$$

11.2. Skaidrs, ka a_1 var būt kvadrāts. Parādīsim, ka neviens cits virknes loceklis nevar būt kvadrāts. Pārbaudīsim, kā savā starpā saistīti a_n un a_{n+1} atlikumi, dalot ar 4.

Ja $a_n \equiv 0 \pmod 4$, tad $a_{n+1} \equiv 0^3 + 2003 \equiv 3 \pmod 4$

Ja $a_n \equiv 1 \pmod 4$, tad $a_{n+1} \equiv 1^3 + 2003 \equiv 0 \pmod 4$

Ja $a_n \equiv 2 \pmod 4$, tad $a_{n+1} \equiv 2^3 + 2003 \equiv 3 \pmod 4$

Ja $a_n \equiv 3 \pmod 4$, tad $a_{n+1} \equiv 3^3 + 2003 \equiv 2 \pmod 4$

No šejienes seko, ka $a_3, a_4, a_5, \ldots$ dod atlikumus 2 vai 3, dalot ar 4. Bet no vienādībām

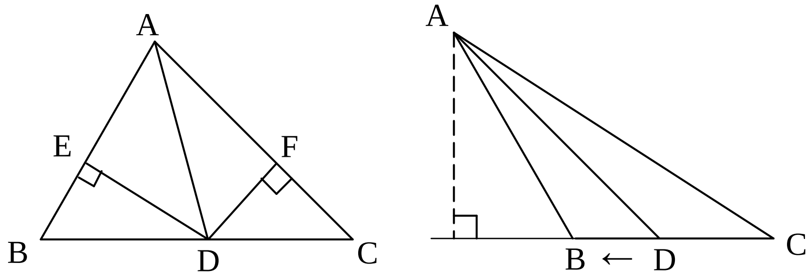
$$(2k)^2 = 4k^2 \text{ un } (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$$

seko, ka naturāla skaitļa kvadrāts dod atlikumu 0 vai 1, dalot ar 4. Tātad kvadrāti varētu būt augstākais a_1 un a_2. Ja $a_1 = x^2$ un $a_2 = y^2$ (x un y – naturāli skaitļi), tad

$$y^2 = x^6 + 2003 \text{ un } (y - x^3)(y + x^3) = 2003.$$

Tā kā 2003 ir pirmskaitlis, tad vienīgā iespēja ir $y - x^3 = 1$, $y + x^3 = 2003$.
Tad $y = 1002$, $x^3 = 1001$. Bet 1001 nav naturāla skaitļa kubs – pretruna.

11.3.



Ievērojam, ka ap četrstūri EAFD var apvilkt riņķa līniju, kuras diametrs ir AD, tāpēc

$$EF = AD \cdot \sin\angle BAC. \text{ Ja } \angle B < 90° \text{ un } \angle C < 90°,$$

tad AD mazākais iespējamais garums tiek sasniegts, ja D ir tā **augstuma pamats**, kas vilkts no virsotnes A. Ja $\angle B \geq 90°$ vai $\angle C \geq 90°$, tad AD mazākās iespējamās vērtības **vispār nav** (jo D ir malas BC **iekšējs** punkts); AD ir jo īsāks, jo tuvāk D ir virsotnei B, respektīvi, virsotnei C (garākai projekcijai atbilst garākā slīpne).
Tā kā $\sin\angle BAC$ ir konstants pozitīvs lielums, tad šis pašas atbildes der arī jautājumam par EF mazāko iespējamo garumu.

11.4. Apzīmēsim ar f(n) tādu virkņu skaitu, kas satur katru no cipariem 1, 2, ..., n tieši vienu reizi un kurās neviens cipars nav par 1 lielāks nekā iepriekšējais; šādas virknes sauksim par n – labām virknēm (n = 1; 2; 3; ...; 9).
Mums jāaprēķina f(9). Viegli saprast, ka f(1) = 1 un f(2) = 1 (attiecīgās labās virknes ir 1 un 2,1).
Mēs pierādīsim, ka pie $1 \leq n \leq 7$

$$(*) \quad f(n+2) = (n+1)\cdot f(n+1) + n \cdot f(n)$$

Ja tas būs pierādīts, tad

$$f(3) = 2\cdot 1+1\cdot 1 = 3;$$

$$f(4) = 3\cdot 3+2\cdot 1 = 11;$$

$$f(5) = 4\cdot 11+3\cdot 3 = 53;$$

$$f(6) = 5\cdot 53+4\cdot 11 = 309;$$

$$f(7) = 6\cdot 309+5\cdot 53 = 2119;$$

$$f(8) = 7\cdot 2119+6\cdot 309 = 16687;$$

$$f(9) = 8\cdot 16687+7\cdot 2119 = 148329.$$

Atliek pierādīt (*).
Katru (n+2) – labu virkni var iegūt vienā no diviem veidiem:

a) vai nu (n+1) – labai virknei pievienojot ciparu n+2 jebkurā no n+1 vietām (pirms pirmā cipara, starp jebkuriem diviem blakus esošiem cipariem vai pēc pēdējā cipara, tikai ne tieši pēc cipara n+1); šādu (n+2) – labu virkņu ir **(n+1) f(n+1)**, un tās ir tās, no kurām izsvītrojot ciparu (n+2), iegūst (n+1) – labu virkni,

b) vai arī ņemot virkni α, kas pa reizei satur ciparus 1, 2, 3, ..., n, n+1 un kurā ir **tieši viens** „aizliegtais" blakus esošo ciparu pāris (k; k+1), un ievietojot ciparu n+2, starp šiem cipariem k un k + 1 . Tās ir tās (n+2) – labās virknes, no kurām, izsvītrojot ciparu n+2, **neiegūst** (n+1) – labu virkni. Ievērosim, ka katram fiksētam k šādu virkņu α ir tieši f(n). Tiešām, šādas virknes α iegūstamas, n – labā virknē aiz k ievietojot k+1, bet veco k+1 aizstājot ar k+2, k+2 – ar k+3, k+3 – ar k+4 utt. Tāpat no virknes α izsvītrojot k+1 un aizstājot k+2 ar k+1, k+3 – ar k+2 utt., iegūst n – labu virkni.

Tā kā virknē α cipars k var būt jebkurš no cipariem 1; 2; ...; n (virknē α ir arī cipars k+1), tad šādu virkņu α ir **n·f(n).**

Līdz ar to formula (*) pierādīta.

11.5. Vispirms pierādīsim nevienādību

$$\frac{x^2}{x+y} \geq \frac{3x-y}{4}, \text{ ja } x,\ y>0.$$

Tiešām, tā ekvivalenta nevienādībai

$$4x^2 \geq 3x^2 - xy + 3xy - y^2 \text{ jeb } (x-y)^2 \geq 0.$$

No šejienes seko, ka $\frac{x^3}{x+y} \geq \frac{3x^2-xy}{4}$.

Saskaitot šīs nevienādības, kur (x; y) = (a; b), (b; c), (c; a), iegūstam

$$\frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+a} \geq \frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right) - (ab+ac+bc)}{4}.$$

Tātad pietiek pierādīt nevienādību

$$\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right) - (ab+ac+bc)}{4} \geq \frac{ab+ac+bc}{2}$$

Bet tā ar ekvivalentiem pārveidojumiem pārveidojama par nevienādību

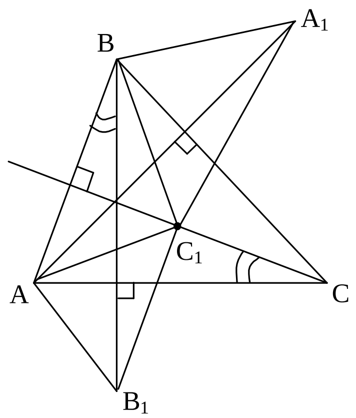
$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

12.1. a) jā. Piemēram, $6!\cdot 7! = 6!\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot(2\cdot 3)\ 7 = 6!\ 7\cdot(2\cdot 4)\ (3\cdot 3)(2\cdot 5) = 10!$
b) jā. Viegli pārbaudīt, ka $(k!)! = k!\ (k!-1)!$.

Tāpēc $(10!)! = 10!\ (10!-1)! = 6!\cdot 7!\ (10!-1)!$ – esam ieguvuši $a!\ b!\ c! = d!$. Līdzīgi var iegūt piemēru $x_1!\ x_2!\cdot\ldots\ x_n! = x_{n+1}!$ jebkuram $n\geq 2$.

12.2. Atbilde: 24 prizmas.
Risinājums. Ja 3 no dotajiem punktiem pieder vienam pamatam, tad jebkuru no tiem var savienot ar šķautni ar ceturto punktu. Iegūstam $C_4^3\cdot 3 = 4\cdot 3 = 12$ prizmas.
Iespējams, ka 2 punkti pieder vienam prizmas pamatam, bet 2 – otram. Sadalīt 4 punktus pa pāriem var 3 veidos. Ja viens pāris ir (A; B) un otrs (C; D), tad jebkurš no nogriežņiem AC, AD, BC, BD var būt prizmas sānu šķautne, un prizma līdz ar to ir noteikta viennozīmīgi. Šādu prizmu tātad ir $3\cdot 4=12$. Ievērojam, ka 12+12 = 24.

12.3.



Skaidrs, ka stari AA_1, BB_1, CC_1 krustojas ΔABC augstumu krustpunktā. Novelkam taisnes nogriežņus AC_1 un BC_1. Ievērojam, ka $\angle ABB_1=\angle C_1CA$ kā leņķi ar savstarpēji perpendikulārām malām. No šejienes izriet, ka $\Delta ABB_1 = \Delta C_1CA$ pēc pazīmes mlm. Tāpēc $AC_1=B_1A$. Vienādo trijstūru ABB_1 un C_1CA atbilstošās malas B_1B un AC, kā arī BA un CC_1 ir savstarpēji perpendikulāras; tā kā šie trijstūri ir vienādi orientēti, tad tie iegūti viens no otra ar pagriezienu par 90°. Tāpēc $C_1A\perp AB_1$ (perpendikulāras arī trešās malas). Tātad ΔC_1AB_1 ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris un $\angle AC_1B_1=45°$. Līdzīgi pierāda, ka $\angle BC_1A_1=45°$. Tāpēc

$$\angle AC_1B_1+\angle AC_1B+\angle BC_1A_1=180°,$$

t.i., punkti B_1, C_1, A_1 atrodas uz vienas taisnes.

Piezīme. To, ka $C_1A\perp AB_1$, var pierādīt arī bez pagrieziena izmantošanas, „skaitļošanas" ceļā.

12.4. Dosim 2 atrisinājumus.
1. risinājums. Pieņemsim, ka apskatāmā tabula uzrakstīta ar zilu krāsu. „Uzliksim" tai virsū ar sarkanu krāsu veidotu tabulu, kuras augšējā rindā no kreisās uz labo uzrakstīti skaitļi 2003; 2002; 2001; ...; 3; 2; 1, bet tālāk tabula veidota pēc tā paša likuma kā „zilā" tabula. Saskaitīsim katrus divus skaitļus, kas uzklājušies viens otram. augšējā rinda tātad sastāv no 2004; 2004; ...; 2004.
Viegli saprast, ka „summas tabulā" T katra nākošā rinda veidojas pēc tā paša likuma kā uzdevuma nosacījumos dotajā. Tāpēc 2. rinda sastāv no 2002 skaitļiem, katrs no kuriem ir $2004\cdot 2$; 3. rinda sastāv no 2001 skaitļa, katrs no kuriem ir $2004\cdot 2^2$, utt. Tātad tabulā T apakšējā virsotnē atrodas skaitlis $2004\cdot 2^{2002}$.
Tā kā tas ir divu vienādu (zilajā un sarkanajā tabulā apakšā esošo skaitļu) summa, tad zilajā tabulā apakšā atrodas skaitlis $2^{2001}\cdot 2004$.

2. risinājums. Ar matemātisko indukciju viegli pierādīt: ja augšējā rindiņā atrodas n skaitļi x_1, x_2, ..., x_n, tad tabulas apakšā veidojas skaitlis

$$C_{n-1}^0 x_1 + C_{n-1}^1 x_2 + ... + C_{n-1}^{n-1} x_n$$

(Induktīvajā pārejā izmanto faktu, ka skaitļu x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} radīto skaitli iegūst, saskaitot komplektu x_1, x_2, ..., x_n un x_2, x_3, ..., x_{n+1} radītos skaitļus).

Tātad mums jāaprēķina izteiksmes

$$1 \cdot C_{2002}^0 + 2 \cdot C_{2002}^1 + 3 \cdot C_{2002}^2 + ... + 2003 \cdot C_{2002}^{2002}$$

vērtība. Šī summa izsakāma kā

$$\left(C_{2002}^0 + C_{2002}^1 + ... + C_{2002}^{2002}\right) + \left(1 \cdot C_{2002}^1 + 2 \cdot C_{2002}^2 + ... + 2002 \cdot C_{2002}^{2002}\right).$$

Pirmās iekavas vērtība ir 2^{2002}. Otrā iekava acīmredzami izsaka veidu skaitu, kuros no 2002 deputātiem var izvēlēties komisiju, ja komisijā jāizvēlas arī priekšsēdētājs. To var izdarīt šādi: izvēlēties priekšsēdētāju un pēc tam jebkuru apakškopu no atlikušajiem 2001 deputātiem. Dažādo iespēju skaits tātad ir

$$2002 \cdot 2^{2001}.$$

Tāpēc prasītā summa ir $2^{2002}+2002 \cdot 2^{2001}=2 \cdot 2^{2001}+2002 \cdot 2^{2001}=2004 \cdot 2^{2001}$.

12.5. Viegli redzēt, ka (1; 1; 0), (1; 0; 1), (0; 1; 1) ir atrisinājumi. Pierādīsim, ka citu atrisinājumu nav. Apzīmēsim $xy=a$, $xz=b$, $yz=c$, $x+y+z=s$, $xyz=r$.

Sistēmas pirmo vienādojumu var pārveidot par

$$x^2+(y-z)^2=2-2c.$$

Tāpēc $c \le 1$. Līdzīgi iegūstam $a \le 1$ un $b \le 1$. Tāpēc $(1-a)(1-c)(1-b) \ge 0$. Bet

$$(1-a)(1-c)(1-b)=1-(a+b+c)+(ab+ac+bc)-abc=$$

$$=1-\frac{1}{2}\left[(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]+xyz(x+y+z)-x^2y^2z^2=$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(s^2-2\right)+sr-r^2=2-\frac{1}{2}(s-r)^2-\frac{1}{2}r^2$$

Tāpēc $2-\frac{1}{2}(s-r)^2-\frac{1}{2}r^2 \ge 0$ un $\frac{1}{2}(s-r)^2 \le 2-\frac{1}{2}r^2 \le 2$, tātad $|s-r| \le 2$. Bet no sistēmas otrā vienādojuma seko $s-r=2$. Tāpēc nevienādības $|s-r| \le 2$ vietā patiesībā ir vienādība, tātad $2-\frac{1}{2}r^2=2$ un $r=0$. Tātad viens no skaitļiem (vismaz!) x, y, z ir 0. Ja, piemēram, $z=0$, tad sistēma pārveidojas par $x^2+y^2=2$, $x+y=2$, no kurienes viegli seko $x=y=1$. Līdzīgi analizē gadījumus k=0 un y=0.