Latvijas 53. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

9. klase

1. Naturālu skaitli sauc par simetrisku, ja, izlasot tā decimālo pierakstu no otra gala, iegūst to pašu skaitli. Piemēram, simetriski ir skaitļi 111; 424; 88; 5225; 7. Ir zināms, ka visi sešciparu simetriskie naturālie skaitļi dalās ar naturālu skaitli x. Kādas var būt x vērtības?

2. Andris izvēlējies 55 dažādus naturālus skaitļus, no kuriem neviens nepārsniedz 99. Vai starp Andra izvēlētajiem skaitļiem noteikti ir divi tādi, kuru starpība ir

a) 11,

b) 12?

3. Trijstūrī ABC zināms, ka $\angle BAC = 2\angle ACB$ un $AC > AB$. Uz malas AC atzīmēts tāds punkts D, ka $CD = AB$. Caur B vilkta taisne t paralēli AC. Virsotnes A ārējā leņķa bisektrise krusto t punktā K; taisne, kas iet caur C un paralēla AB, krusto t punktā L. Pierādīt, ka $DK = DL$.

4. Kādām a vērtībām vienādojumam

$$\left(x^2 - 2ax - 4a^2 - 4\right)\left(x^2 - 4x - 2a^3 - 2a\right) = 0$$

ir tieši trīs dažādas reālas saknes?

5. Kādu lielāko daudzumu skaitļu var izrakstīt rindā tā, lai katru 5 pēc kārtas izrakstītu skaitļu summa būtu negatīva, bet katru 8 pēc kārtas izrakstītu skaitļu summa – pozitīva?

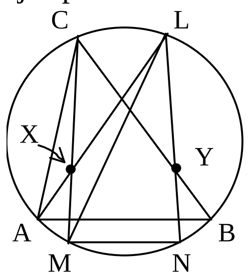
10. klase

1. Atrisināt vienādojumu

$$\frac{1}{|x-2|} = \frac{1}{|x-10a|}$$, kur a – parametrs, bet x – mainīgais.

2. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi, pie tam a nedalās ar 5. Skaitļu virkni $x_1, x_2, x_3, \ldots$ veido sekojoši: $x_1 = 5$, $x_{n+1} = ax_n + b$, ja n=1; 2; 3; ... . Kādai lielākajai k vērtībai iespējams, ka visi skaitļi $x_1; x_2; x_3; \ldots; x_k$ ir pirmskaitļi?

3. Trijstūri ABC un MNL ir ievilkti vienā un tai pašā riņķa līnijā, pie tam $AB \| MN$ (skat. zīm.). Taisnes MC un AL krustojas punktā X; taisnes BC un LN krustojas punktā Y. Pierādīt, ka $XY \| MN$.



4. Kvadrāts ar malas garumu n sadalīts n^2 vienādās kvadrātiskās rūtiņās, kas izkrāsotas šaha galdiņa kārtībā. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties taisnstūri, kas sastāv no nesadalītām rūtiņām (vismaz divām) un kam visu malu garumi ir ar vienādu paritāti (t.i., visi – pāra skaitļi vai visi – nepāra skaitļi), un šī taisnstūra iekšpusē mainīt rūtiņu krāsas uz pretējo. Kādiem n, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai visas rūtiņas būtu vienā krāsā?

5. Katrā šaha galdiņa rūtiņā ierakstīts skaitlis, kas pēc moduļa (absolūtās vērtības) nepārsniedz 1. Ir zināms, ka katrā kvadrātā ar izmēriem 3x3 rūtiņas ierakstīto skaitļu summa ir 0. Kāda ir lielākā iespējamā visu 64 ierakstīto skaitļu summa?

Latvijas 53. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

11. klase

1. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ y^2+z^2=2x \\ z^2+x^2=2y \end{cases}$

2. Naturālu skaitļu virknē $a_1, a_2, \ldots$ pirmo locekli a_1 izvēlas patvaļīgi, un pie $n \geq 1$ pastāv vienādība $a_{n+1} = a_n^3 + 2003$. Kāds lielākais daudzums virknes locekļu var būt naturālu skaitļu kvadrāti?

3. No trijstūra ABC malas BC iekšēja punkta D vilkti perpendikuli pret taisnēm AB un AC. Kādam D stāvoklim attālums starp šo perpendikulu pamatiem ir vismazākais?

4. Deviņu ciparu virkni sauc par labu, ja tā vienlaicīgi apmierina šādus divus nosacījumus:

a) tā satur visus ciparus no 1 līdz 9,

b) neviens cipars, sākot ar otro, nav par 1 lielāks nekā iepriekšējais cipars.

Cik ir labu virkņu?

5. Pierādīt, ka pozitīviem a, b un c

$$\frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{b+c}+\frac{c^3}{c+a} \geq \frac{ab+ac+bc}{2}$$

12.klase

1. Vai eksistē

a) tādi naturāli skaitļi x, y un z, kas lielāki par 1, ka $x! \cdot y! = z!$?

b) tādi naturāli skaitļi a, b, c, d, e, kas lielāki par 1, ka $a! \cdot b! \cdot c! \cdot d! = e!$?

2. Telpā doti 4 punkti, kas neatrodas vienā plaknē. Cik ir trijstūra prizmu, kurām šie 4 punkti ir virsotnes?

3. Dots, ka ABC – šaurleņķu trijstūris ar īsāko malu AB. No tā virsotnēm vilkti stari perpendikulāri pretējām malām, kuri krusto šīs malas. Uz stariem atlikti punkti A_1, B_1, C_1 tā, ka $AA_1=BC$, $BB_1=AC$, $CC_1=AB$ (A_1 atlikts uz stara, kas vilkts no virsotnes A, utt.). Zināms, ka C_1 atrodas ABC iekšpusē, A_1 un B_1 – ārpus ABC un $\angle AC_1B=90^o$. Pierādiet, ka punkti A_1, B_1, C_1 atrodas uz vienas taisnes.

4. "Tabulā"

```
1     2     3     4     5
   3     5     7     9
      8     12    16
         20    28
            48
```

augšējā rindiņā pēc kārtas izrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 5; nākošajās rindiņās katrs skaitlis vienāds ar abu virs tā uzrakstīto skaitļu summu. Kāds skaitlis atrodas apakšējā "virsotnē" tabulā, kas veidota līdzīgi un kuras augšējā rindiņā izrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 2003 ieskaitot?

5. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ x+y+z=2+xyz \end{cases}$$