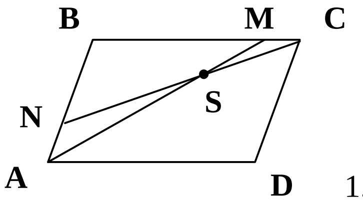
# Latvijas 54. matemātikas olimpiādes
# 3. kārtas uzdevumi

## 9. klase

**1.** Dots, ka a, b, c – pozitīvi skaitļi un $a^2 + b^2 = 2c^2$.

Pierādīt, ka $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{a+b}$

**2.** Dots, ka ABCD – paralelograms un AM = CN (skat. 1.zīm.). Pierādīt, ka D atrodas uz $\angle ASC$ bisektrises.




1. zīm.

**3.** Jānītis grib uzrakstīt n dažādus naturālus skaitļus tā, lai nekādu sešu uzrakstīto skaitļu summa nedalītos ar 6.

Vai tas ir iespējams, ja

a) n = 10, b) n = 11 ?

**4.** Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Andris pēc kārtas novieto pa vienam tornim kādā vēl neaizņemtā rūtiņā saskaņā ar šādiem noteikumiem: pirmo torni viņš drīkst novietot patvaļīgā rūtiņā pēc savas izvēles, bet katru nākošo torni jānovieto tādā rūtiņā, kur to uzlikšanas brīdī apdraud nepāra skaits jau novietoto (divi torņi apdraud viens otru, ja tie abi atrodas vienā horizontālē vai vienā vertikālē un starp tiem nav citu torņu).

Kādu lielāko torņu daudzumu Andrim var izdoties novietot?

**5.** Pa apli uzrakstīti 5 skaitļi. To summa ir 1, un neviens skaitlis pēc moduļa (absolūtās vērtības) nepārsniedz 1.

Pierādīt, ka var atrast trīs tādus skaitļus x, y un z, ka $x + y \geq 0$, $y + z \geq 0$ un $x + y + z \geq 0$, pie tam skaitļi x; y; z tieši šādā secībā viens aiz otra uzrakstīti pa apli.

## 10. klase

**1.** Dots, ka a, b, c – nenegatīvi skaitļi, no kuriem neviens nav lielāks par 1.

Pierādīt, ka $a + b + c - abc \leq 2$.

**2.** Kvadrāta OABC virsotne O atrodas riņķa centrā, bet virsotne B – uz riņķa līnijas. Taisne, kas caur A novilkta paralēli OB, krusto riņķa līniju punktā E.

Aprēķināt $\angle AOE$.

**3**. Uz tāfeles uzrakstīti dažādi pirmskaitļi, to vidējais aritmētiskais ir 27.

Kāds vislielākais pirmskaitlis var būt uzrakstīts uz tāfeles?

**4.** Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām.

Kādam mazākajam naturālajam n piemīt īpašība: lai kuras n rūtiņas nokrāsotu, noteikti atradīsies tādas 3 nokrāsotas rūtiņas, kuru centri ir taisnleņķa trijstūra virsotnes, pie tam šī trijstūra katetes paralēlas kvadrāta malām?

**5.** Doti sviras svari bez atsvariem un 98 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Dažas (vismaz 1) no tām ir īstas (visas sver vienādi), bet dažas (vismaz 1) ir viltotas (arī visas sver vienādi), pie tam īstās monētas masa ir lielāka par viltotās monētas masu.

Vai ar 50 svēršanām var noskaidrot, cik ir īsto monētu? (Ja kaut uz viena svaru kausa kaut kas tiek mainīts, tā jau skaitās cita svēršana)

# Latvijas 54. matemātikas olimpiādes
# 3. kārtas uzdevumi

## 11. klase

**1.** Pierādīt, ka pozitīviem x un y pastāv nevienādība

$$(x+y)(1+xy) \geq 4xy$$

**2.** Kādiem pirmskaitļiem a un b skaitlis $a^2+3ab+b^2$ ir naturāla skaitļa kvadrāts?

**3.** Šaurleņķu trijstūrī ABC punkts O ir apvilktās riņķa līnijas centrs, bet BE un CF – augstumi. Pierādīt, ka $OA \perp EF$.

**4.** Kādām reālām parametra a vērtībām vienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} x^2+1+z=(a+1)x+ay \\ y^2+1+x=(a+1)y+az \\ z^2+1+y=(a+1)z+ax \end{cases}$$

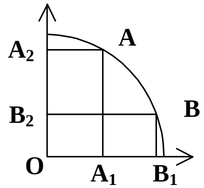
ir tieši viens atrisinājums reālos skaitļos (x, y, z) ?

**5.** Uz n šķīvjiem atrodas konfektes; konfekšu pavisam ir k, pie tam $n \geq 4$ un $k \geq 4$. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties divus šķīvjus, uz katra no kuriem ir vismaz viena konfekte, paņemt no katra izvēlētā šķīvja vienu konfekti un tās abas uzlikt uz kāda cita šķīvja. Citas darbības nav atļautas.

Vai noteikti var panākt, ka visas konfektes atrodas uz viena šķīvja?

## 12.klase

**1.** Uz vienības riņķa līnijas loka pirmajā kvadrantā ņemti divi punkti A un B; to projekcijas uz koordinātu asīm ir $A_1$, $B_1$, $A_2$ un $B_2$ (skat. 1.zīm.).




1. zīm.

Pierādīt, ka trapeču $B_2A_2AB$ un $A_1ABB_1$ laukumu summa atkarīga tikai no hordas AB garuma, bet ne no tās novietojuma.

**2.** Juris iedomājies naturālu skaitli x no 1 līdz n ieskaitot. Andris drīkst viņam uzdot jautājumus "vai x ir no kopas A?", kur A – jebkura tādu dažādu naturālu skaitļu kopa, kuru summa ir 18. Vai Andris var noskaidrot iedomāto skaitli ar 3 jautājumiem, ja

a) n = 8, b) n = 9 ?

**3.** Izliektam daudzskaldnim M nav triju skaldņu ar vienādu malu skaitu. Kāds ir mazākais iespējamais M virsotņu skaits?

**4.** Uz tāfeles uzrakstīti n dažādi reāli skaitļi. Ir zināms: katriem diviem dažādiem uzrakstītiem skaitļiem x un y var atrast trešo uzrakstīto skaitli z tā, ka x, y, z veido aritmētisku progresiju (varbūt citā secībā). Kāda ir lielākā iespējamā n vērtība?

**5.** Dots, ka $x_1 = 3$, $y_1 = 4$ un katram naturālam n pastāv sakarība

$$x_{n+1} = 3x_n + 2y_n\,,\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n\,.$$

Pierādīt, ka neviens no skaitļiem $y_1$, $y_2$, $y_3$, ... nav naturāla skaitļa kubs.

2004.gada 11.marts