Latvijas 56. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

9. klase

1. Atrisināt vienādojumu $x + y = 1025$, ja x un y ir naturāli skaitļi – skaitļa 640000 dalītāji.

2. Apzīmējam $f(x) = x^2 + px + q$. Zināms, ka vienādojumam $f(x) = 0$ ir divas saknes, no kurām viena atrodas starp 0 un 1, bet otra – nē. Pierādīt, ka $f(q) \le 0$.

3. Trijstūra ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir I. Uz taisnes AB atrasti tādi divi dažādi punkti C_1 un C_2, ka $IC_1 = IC_2 = IC$; uz taisnes AC atrasti tādi divi dažādi punkti B_1 un B_2, ka $IB_1 = IB_2 = IB$; uz taisnes BC atrasti tādi divi dažādi punkti A_1 un A_2, ka $IA_1 = IA_2 = IA$. Pierādīt, ka $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = AB + BC + CA$.

4. Eksāmenam tika sagatavoti 8 uzdevumi. Katram skolēnam iedeva 3 no tiem. Nav tādu divu skolēnu, kas būtu saņēmuši vairāk nekā vienu kopīgu uzdevumu. Kāds ir lielākais iespējamais skolēnu skaits?

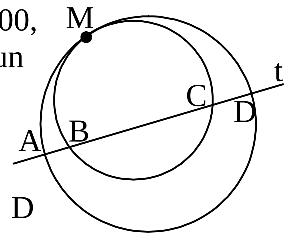
5. Deviņos traukos pavisam kopā ir 36 litri ūdens. Ūdeni, kas ir 1. traukā, sadalīja 8 vienādās daļās un šīs daļas ielēja pārējos 8 traukos (pa vienai daļai katrā traukā). Pēc tam to pašu izdarīja ar ūdeni, kas bija 2. traukā, 3. traukā, ..., 8. traukā, 9. traukā. Izrādījās, ka tagad katrā traukā ir tikpat ūdens, cik tur bija sākumā. Cik litru ūdens sākumā bija katrā traukā?

10. klase

1. Kādā valstī ir 100 pilsētas. Starp dažām no tām noorganizēti avioreisi. Starp katrām divām pilsētām ir augstākais viens reiss. Katrs reiss savieno tikai 2 pilsētas, pa ceļam nenolaižoties citās. Katrs reiss „darbojas" abos virzienos. Reisus organizē 90 aviokompānijas. Katra aviokompānija organizē tieši 30 reisus. Ja kompānija organizē reisu starp kādām divām pilsētām (apzīmēsim tās ar A un B), tad tai ir biroji gan pilsētā A, gan pilsētā B. Pierādīt, ka ir tāda pilsēta, kurā ir vismaz 9 biroji.

2. Kādiem pirmskaitļiem p un q, kas nepārsniedz 100, visi skaitļi $p + 6$, $p + 10$, $q + 4$, $q + 10$ un $p + q + 1$ arī ir pirmskaitļi?

3. Divas riņķa līnijas iekšēji pieskaras punktā M. Taisne t krusto tās punktos A, B, C, D (skat. 1. zīm.) Pierādīt, ka $\angle AMB = \angle CMD$.



1. zīm.

4. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2006}} > 21{,}8$$

5. Kādam mazākajam naturālajam skaitlim n piemīt šāda īpašība: vienalga kādā veidā nokrāsojot dažus no naturālajiem skaitļiem 1; 2; 3; ...; n baltus, bet pārējos – sarkanus, vienādojumam $x + y + z = t$ eksistē atrisinājums, kurā visu četru mainīgo vērtības ir vienā un tai pašā krāsā (starp šīm vērtībām var būt arī savā starpā vienādas)?

Latvijas 56. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

11. klase

1. Skolā ir n skolnieki un m skolotāji. Ir zināms, ka katrs skolotājs māca tieši a skolniekus, $a > 1$, un katriem diviem dažādiem skolniekiem var atrast tieši b skolotājus, kuri māca abus šos skolniekus. Pierādīt, ka

$$\frac{m}{b} = \frac{n(n-1)}{a(a-1)}.$$

2. Reālu skaitļu virknē (a_n), $n = 1; 2; 3; ...$, pirmo locekli a_1 izvēlas patvaļīgi, bet katru nākošo aprēķina pēc formulas $a_{n+1} = a_n(a_n + 2)$, $n = 1; 2; 3; ...$. Kādas vērtības var pieņemt a_{2006}?

3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $(x+y)(xy+1) = 2^z$.

4. Dots, ka ΔABC ir šaurleņķu trijstūris. Riņķa līnija ω iet caur A un B un krusto malas AC un BC attiecīgi punktos M un N. Pieskares, kas ω novilktas punktos M un N, krustojas punktā O. Pierādīt: O ir ΔCMN apvilktās riņķa līnijas centrs tad un tikai tad, ja AB ir ω diametrs.

5. Regulāra n – stūra A virsotnēs ierakstīti skaitļi: n-1 virsotnē nulles, bet vienā virsotnē – vieninieks. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuru tādu regulāru daudzstūri D, kura visas virsotnes ir n-stūra A virsotnēs, un visiem skaitļiem daudzstūra D virsotnēs pieskaitīt 1. Kādiem n, atkārtojot šādus gājienus, iespējams panākt, lai visās n-stūra A virsotnēs būtu ierakstīti vienādi skaitļi?

12.klase

1. Pierādīt, ka $(1+\mathrm{tg}1^\circ)(1+\mathrm{tg}2^\circ)(1+\mathrm{tg}3^\circ)\ldots(1+\mathrm{tg}44^\circ)(1+\mathrm{tg}45^\circ) = 2^{23}$

2. Funkcija $f(x)$ definēta pie $0 \le x \le 1$. Zināms, ka $f(0) = f(1) = 0$ un visiem x un y no intervāla [0; 1] pastāv nevienādība

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le f(x) + f(y).$$

a) Pierādīt: vienādojumam $f(x) = 0$ ir bezgalīgi daudz atrisinājumu,

b) vai eksistē tāda funkcija, kas apmierina uzdevuma nosacījumus un starp kuras vērtībām ir tādas, kas atšķiras no 0?

3. Trijstūrī ABC visas malas ir dažāda garuma un tajā ievilktās riņķa līnijas centrs ir I. Ievilktā riņķa līnija pieskaras malām AB, BC, CA attiecīgi punktos D, E, F.

a) Pierādīt, ka ΔCDI un ΔDSI ir līdzīgi, ja S ir CI un EF krustpunkts,

b) pieņemsim, ka K ir nogriežņa CD un ievilktās riņķa līnijas kopējais punkts, kas atšķiras no D. Taisne, kas punktā K pieskaras ievilktajai riņķa līnijai, krusto taisni AB punktā G. Pierādīt, ka $GS \perp CI$.

4. Naturāli skaitļi m un n apmierina sekojošu īpašību: m dalās ar jebkuru no skaitļiem 1; 2; 3; ... ; n, bet nedalās ne ar n + 1, ne ar n + 2, ne ar n + 3. Kādas ir iespējamās n vērtības?

5. Uz katras daudzskaldņa šķautnes atzīmēta bultiņa. Zināms, ka katrā virsotnē ieiet vismaz viena bultiņa un no katras virsotnes iziet vismaz viena bultiņa.

a) Pierādīt: ja daudzskaldnis ir izliekts, tad noteikti eksistē tāda skaldne, kuras kontūru var apiet, ejot pa malām bultiņu norādītajos virzienos,

b) vai šī īpašība noteikti izpildās, ja daudzskaldnis nav izliekts?