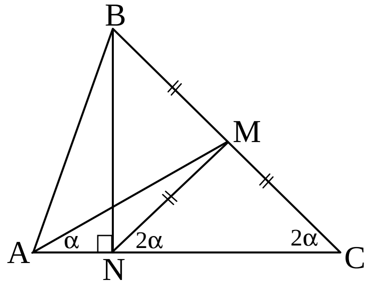
9.1. Doto vienādību pārveido par $x^2 - y^2 = 2007(x - y)$ un tālāk par $(x-y)(x+y)=2007(x-y)$. Tā kā $x \neq y$, tad no šejienes seko $x+y=2007$.

9.2. Var ņemt $p=-1$, $q=-2$. **Patvaļīgam** veselam skaitlim a apskatām vienādojumu $x^2 + (a-1)x + (a-2) = 0$. Tam ir saknes $x_1=-1$ un $x_2=2-a$.

9.3. Tā kā ΔBNC ir taisnleņķa, tad tajā mediāna pret hipotenūzu vienāda ar pusi no hipotenūzas, t.i., NM=MC. Tāpēc $\angle MNC = 2\alpha$. No ΔANM ārējā leņķa seko, ka $\angle AMN = 2\alpha - \alpha = \alpha$, tātad ΔANM – vienādsānu. Tāpēc AN=NM=MC, no kurienes seko vajadzīgais.



1. zīm.

9.4. Atbilde: 0; 4; 6; 8; 10; ...; 38; 40; 42.

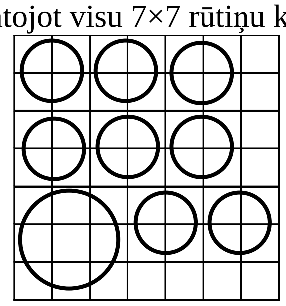
Risinājums. Tā kā katrā rindā ir pāra skaits melno rūtiņu, tad a) tas nepārsniedz 6, un tādēļ kopējais melno rūtiņu skaits nepārsniedz 6·7=42, b) kopējais melno rūtiņu skaits ir pāra skaitlis. Viegli saprast, ka 0 melno rūtiņu var būt, bet 2 melnas rūtiņas – nē (*tas tomēr skolēna darbā jāpaskaidro!*). Atliek parādīt, kā iegūt 4; 6; 8; ...; 40; 42 melnas rūtiņas. Mēs to panāksim, izvietojot melnās rūtiņas divu veidu blokos: kvadrātos ar izmēriem $2k \times 2k$ rūtiņas, kur **katra** rūtiņa ir melna, un kvadrātos ar izmēriem $(2k+1)\times(2k+1)$ rūtiņas, kur melnas ir visas rūtiņas, izņemot vienu diagonāli.

1) Vērtības 4; 8; 12; ...; 32; 36 tiek iegūtas, izmantojot 1; 2; 3; ...; 9 kvadrātus ar izmēriem 2×2.

2) Vērtība 6 tiek iegūta, izmantojot kvadrātu 3×3 (ievietojam to lielā kvadrāta stūrī); vērtības 10; 14; 18; ...; 38 tiek iegūtas, pievienojot tam 1; 2; 3; ...; 8 kvadrātus ar izmēriem 2×2 (skat. 2.zīm.).

3) Vērtība 40 tiek iegūta ar vienu 5×5 rūtiņu kvadrātu un pieciem 2×2 rūtiņu kvadrātiem.

4) Vērtība 42 tiek iegūta, izmantojot visu 7×7 rūtiņu kvadrātu.



2.zīm.

8	3	9
1	5	6
7	2	4

3. zīm.

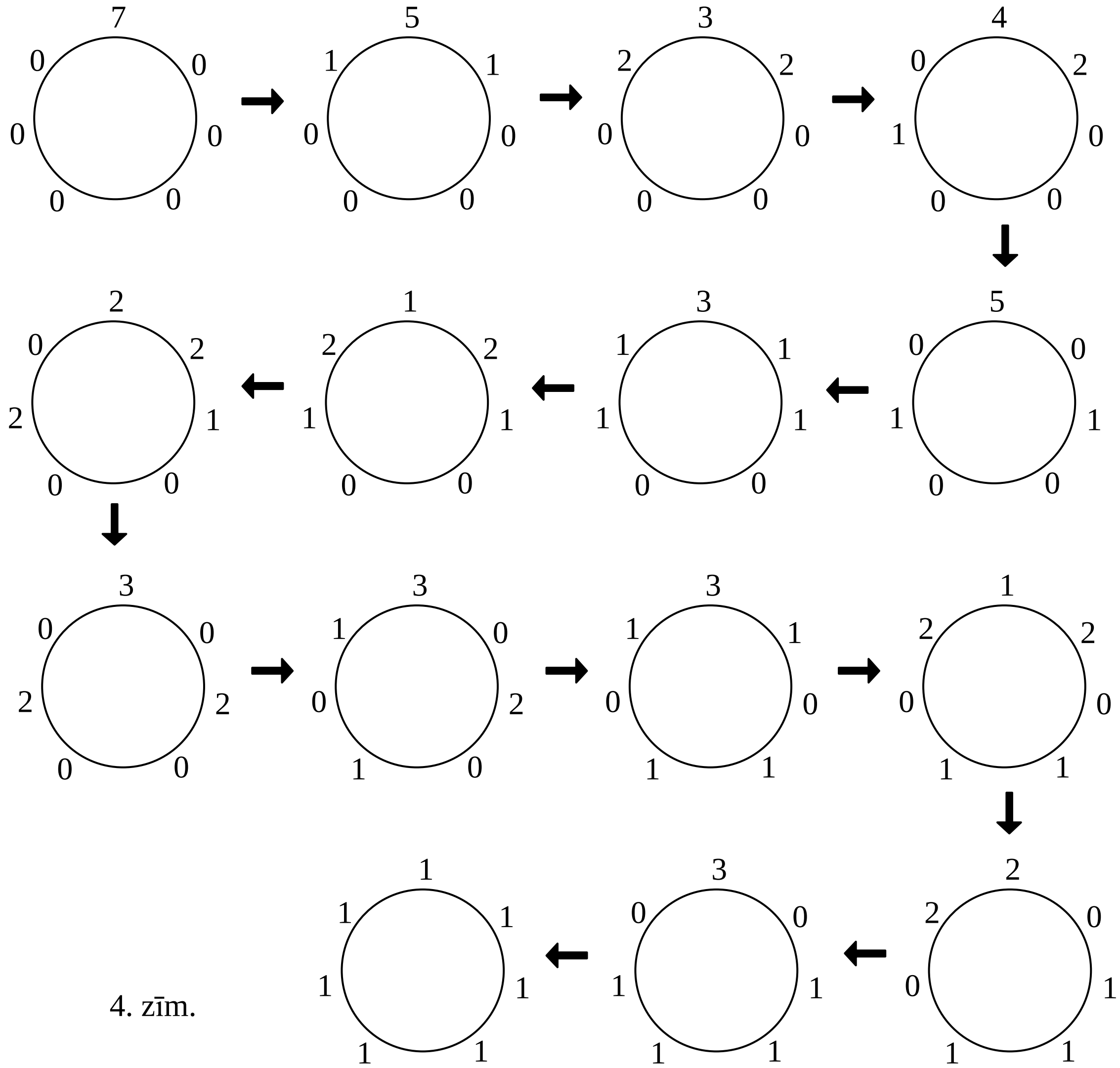
9.5. a) jā, skat., piem., 3. zīm.

b) nē. Apskatīsim pirmskaitļus 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79. Tā kā tie visi lielāki par $\frac{1}{2} \cdot 81$, tad neviens cits ierakstāmais skaitlis ne ar vienu no tiem nedalās. Tāpēc šiem skaitļiem jābūt uz diagonāles (ja kāds pirmskaitlis sastopams rindiņas elementu reizinājumā, tad aritmētikas pamatteorēmas dēļ tam jābūt sastopamam arī atbilstošās kolonnas elementu reizinājumā). Bet šo pirmskaitļu pavisam ir 10, un tie jāizvieto 9 vietās – pretruna.

10.1. a) jā; piemēram, x=4 un y=2.

b) nē; izteiksmi var pārveidot par $x(x-1)-y(y-1)$, no kurienes redzams, ka tā kā divu pāra skaitļu starpība ir pāra skaitlis.

10.2. a) jā. Skat., piem., 4. zīm.



4. zīm.

b) nē. Sanumurēsim trauciņus pēc kārtas ar numuriem 1; 2; 3; ...; 10. Monētu kopējais skaits 1., 3., 5., 7., 9. trauciņā sākumā ir pāra skaitlis un ar katru gājienu mainās par 2. Tāpēc tas vienmēr paliek pāra skaitlis. Bet, sasniedzot uzdevuma mērķi, šajos trauciņos kopā būtu 5 monētas – pretruna.

10.3. Ja a un b ir viens otram sekojoši pirmskaitļi un $a \le n < b$, tad $x(n)=a$ un $y(n)=b$. Tāpēc katram šādam n atbilstošais saskaitāmais summā ir $\frac{1}{a \cdot b}$. Ja visiem šādiem n atbilstošie saskaitāmie summā ir, tad to daudzums ir tieši b-a.

Atliek ievērot, ka 601 ir pirmskaitlis. Apzīmējot pirmskaitļus no 2 līdz 601 augošā kārtībā ar p_1, p_2, ..., p_n, iegūstam, ka apskatāmā summa ir

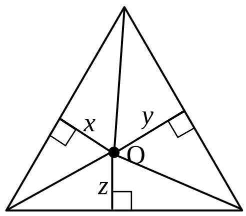
$$\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}+\frac{p_3-p_2}{p_2 p_3}+\ldots+\frac{p_n-p_{n-1}}{p_{n-1} p_n}=\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_3}+\ldots+\frac{1}{p_{n-1}}-\frac{1}{p_n}=\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{601},$$

k.b.j.

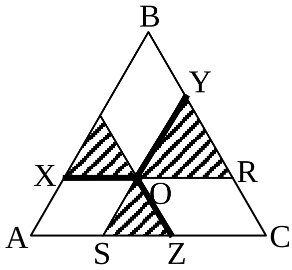
10.4. Tā kā OX, OY, OZ pa pāriem veido 120° lielus leņķus, tad to vidusperpendikuli pa pāriem veido 60° lielus leņķus, tāpēc to veidotais trijstūris Δ ir regulārs. Punkts O atrodas Δ iekšpusē, un tā attālumu summa Σ līdz Δ malām ir $\frac{1}{2}(\mathrm{OX}+\mathrm{OY}+\mathrm{OZ})$. Mēs pierādīsim divus faktus:

A. Σ vienāda ar Δ augstumu,
B. OX+OY+OZ=AC.
No tā sekos, ka visiem Δ ir vienādi augstumi, tātad tie ir vienādi savā starpā; tātad visiem Δ ir vienādi laukumi.
Atliek pierādīt minētos faktus.

A. Apzīmējot Δ laukumu ar L, malas garumu ar *a*, bet augstumu ar *h*, iegūstam, ka $\mathrm{L}=\frac{1}{2}ah$ un $\mathrm{L}=\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}az$ (skat. 5. zīm.); no tā seko vajadzīgais.



5. zīm.



6. zīm.

B. Iesvītrotie trijstūri ir regulāri (skat. 6. zīm.). Tāpēc
OX+OY+OZ=OX+OR+SZ=AS+ZC+SZ=AC, k.b.j.

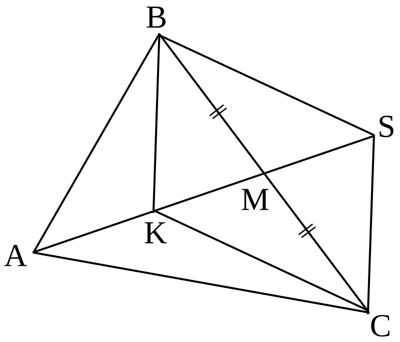
10.5. No *n* dažādiem skaitļiem var izveidot $\frac{n(n-1)}{2}$ summas *x*+*y*, kur *x*≠*y*; *n* summas *x*+*x*=2*x*; bez tam *n* veidos var ņemt vienu pašu skaitli *x*. Tāpēc jābūt $\frac{n(n-1)}{2}+2n\geq 27$ **(*)**,
no kurienes seko *n*≥6.
Apzīmēsim uzrakstīto skaitļu kopu ar K. Pie *n*=6 nevienādībā (*) pastāv vienādība. Tātad katram skaitlim no 1 līdz 27 jābūt izsakāmam vienā vienīgā veidā. No tā pakāpeniski seko, ka $1\in\mathrm{K}$; $2\notin\mathrm{K}$; $3\in\mathrm{K}$; $4\notin\mathrm{K}$; $5\in\mathrm{K}$. Tagad redzam, ka 6 var izsacīt gan kā 1+5, gan kā 2·3 – pretruna.

11.1. a) jā; piemēram, var ņemt *n*=9.
b) nē. Skaitlis, dalot ar 9, dod tādu pašu atlikumu kā tā ciparu summa. Ja uzdevumā minētais skaitlis *n* eksistētu, tad *n* un *n*+199 dotu vienādus atlikumus, dalot ar 9. Tad to starpība (*n*+199)-*n*=199 dalītos ar 9 – pretruna.

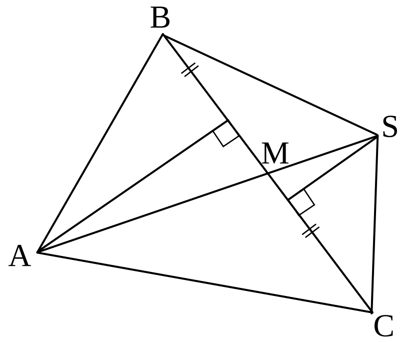
11.2. Jā, eksistē. Piemēram, var ņemt trinomus x^2, $(x-1)^2$ un $(x+1)^2$.

11.3. Sanumurēsim katrā lapas pusē esošos daudzstūrus ar skaitļiem 1; 2; 3. Tās daļas laukumu, pa kuru „pārklājas" daudzstūris ar numuru *i* lapas pirmajā pusē un daudzstūris ar numuru *j* lapas otrajā pusē, apzīmēsim ar L_{ij}; lapas kopējo laukumu apzīmēsim ar L. Skaidrs, ka
$$(\mathrm{L}_{11}+\mathrm{L}_{22}+\mathrm{L}_{33})+(\mathrm{L}_{12}+\mathrm{L}_{23}+\mathrm{L}_{31})+(\mathrm{L}_{13}+\mathrm{L}_{21}+\mathrm{L}_{32})=\mathrm{L}.$$
Tāpēc vismaz viena no iekavām nav mazāka par $\frac{\mathrm{L}}{3}$. Pieņemsim, ka tā ir iekava $\mathrm{L}_{i_1j_1}+\mathrm{L}_{i_2j_2}+\mathrm{L}_{i_3j_3}$.
Nokrāsojot vienādās krāsās daudzstūrus ar numuriem i_1 un j_1; i_2 un j_2; i_3 un j_3 (attiecīgi lapas pirmajā un otrajā pusē), iegūstam vajadzīgo.

11.4. Izvēlamies tādu punktu S, ka BSCK ir paralelograms (skat. 7. zīm.); A, K, M, S atrodas uz vienas taisnes.



7. zīm.



8. zīm.

Tad $\angle BAC + \angle BSC = \angle BAC + \angle BKC = 180°$. Tāpēc arī $\angle ABS + \angle ACS = 180°$; no tā seko, ka $\sin\angle ABS = \sin\angle ACS$.

Ievērojam, ka L(ABM)=L(ACM) un L(SBM)=L(SCM) (trijstūri ar vienādiem pamatiem un kopīgiem augstumiem). Tāpēc L(ABS)=L(ACS).

Iegūstam $\frac{1}{2}AB\cdot BS\cdot\sin\angle ABS = \frac{1}{2}AC\cdot CS\cdot\sin\angle ACS$, no kurienes seko AB·BS=AC·CS. Bet BS=KC un CS=KB, no kurienes seko vajadzīgais.

11.5. Vispirms pierādīsim īpašību: katram naturālam n $a_n = 0 \Leftrightarrow a_{n+3} = 0$. Tiešām, ja a_n=0, tad no dotās vienādības seko, ka saucēji un tātad arī skaitītāji ir pretēji skaitļi; no tā seko a_{n+3}=0. Ja a_{n+3}=0, no dotās vienādības seko, ka skaitītāji un tātad arī saucēji ir pretēji skaitļi; no tā seko a_n=0.

Izmantojot šo īpašību, iegūstam:

ja $n\geq 1$, tad $a_{3n}\neq 0$ (jo $a_{33}\neq 0$)
ja $n\geq 0$, tad $a_{3n+1}\neq 0$ (jo $a_{22}\neq 0$)
ja $n\geq 0$, tad $a_{3n+2}\neq 0$ (jo $a_{11}\neq 0$).

Līdz ar to a) daļa pierādīta.

No dotās vienādības seko, ka

$$(a_{n+3} - a_{n+2})(a_n + a_{n+1}) = (a_n - a_{n+1})(a_{n+3} + a_{n+2});$$

pēc vienkāršošanas iegūstam

$$a_{n+1}a_{n+3} = a_n a_{n+2} \qquad \textbf{(1)}$$

Ņemot n vietā n+1, iegūstam

$$a_{n+2}a_{n+4} = a_{n+1}a_{n+3} \qquad \textbf{(2)}$$

Sareizinot (1) un (2), iegūstam

$$a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}a_{n+4} = a_n a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} \qquad \textbf{(3)}$$

Tā kā $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} \neq 0$, no šejienes seko $a_{n+4}=a_n$.

Tātad virkne ir periodiska ar periodu, ne lielāku kā 4.

Tāpēc $a_1=a_{33}=1$; $a_2=a_{22}=2$; $a_3=a_{11}=4$; $a_4 = \frac{a_1\cdot a_3}{a_2} = 2$. No šejienes

$a_1^{\,k} + a_2^{\,k} + \ldots + a_{100}^{\,k} = 25(1^k + 2^k + 4^k + 2^k) = 25(1+2^k)^2 = \left(5(1+2^k)\right)^2$, no kā seko vajadzīgais.

12.1. Ja x – kopējā sakne, tad $x^2 + a^2x + b^3 = x^2 + b^2x + a^3$, no kurienes $(a^2 - b^2)\cdot x = a^3 - b^3$. Ja $a\neq b$, tad $x = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b} = \frac{\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}}{a+b} > 0$. Bet skaidrs, ka dotajiem vienādojumiem nav pozitīvu sakņu.

Ja turpretī $a=b$, tad abi vienādojumi ir identiski viens otram. Vienādojumam $x^2+a^2x+a^3=0$ ir reāla sakne tad un tikai tad, ja $a^4-4a^3\geq 0 \Leftrightarrow a^3(a-4)\geq 0$. Tā kā $a\geq 0$, tad tas ir gadījumos, ja $\boldsymbol{a=b=0}$ vai $\boldsymbol{a=b\geq 4}$.

12.2. a) jā; piemēram, divās pretējās kuba virsotnēs ieraksta „-1”, bet citās ieraksta „+1”.
b) nē. Pieņemsim, ka to izdevies izdarīt. Tad **visu** ierakstīto skaitļu reizinājums vienāds ar prizmas pamatu reizinājumu reizinājumu; tāpēc tas ir (-1)·(-1)=1. No otras puses, tas ir piecu sānu skaldņu reizinājumu reizinājums (ņemot ik otro skaldni); tāpēc tas ir $(-1)^5=-1$ – pretruna.

12.3. Ja $(x;y)$ ir sistēmas atrisinājums, tad atrisinājumi ir arī $(-x;y)$, $(x;-y)$, $(-x;-y)$; tāpēc meklēsim atrisinājumu pie $x\geq 0$, $y\geq 0$. Ja $(x;y)$ ir sistēmas atrisinājums, tad atrisinājums ir arī $(y;x)$; tāpēc meklēsim atrisinājumu pie $x\leq y$.
Saskaitot abus vienādojumus, iegūstam

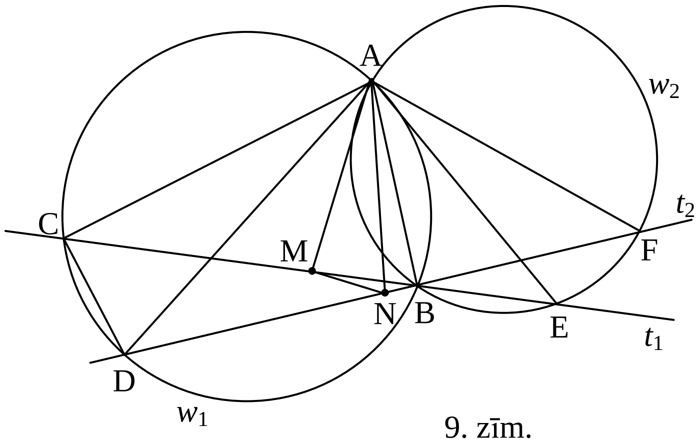
$$x^2+y^2=2 \qquad \textbf{(1)}$$

Atņemot abus vienādojumus, pēc pārveidojumiem iegūstam

$$2\sin^2 x-2\sin^2 y=y^2-x^2 \qquad \textbf{(2)}$$

No (1) seko, ka $0\leq x\leq y\leq\sqrt{2}<\dfrac{\pi}{2}$. Tā kā šajā apgabalā funkcijas $f(t)=\sin^2 t$ un $g(t)=t^2$ abas ir augošas, tad $\sin^2 x\leq\sin^2 y$ un $y^2\geq x^2$; tāpēc no (2) seko, ka $x=y$. No (1) iegūstam $x=y=1$. Pārbaude parāda, ka tas tiešām ir sistēmas atrisinājums.
Tātad sistēmai ir 4 atrisinājumi $(x;y)$: (1;1), (1;-1), (-1;1), (-1;-1).

12.4.



9. zīm.

No ievilktu leņķu un krustleņķu īpašībām

$$\boldsymbol{\angle CAD}=\angle CBD=\angle EBF=\boldsymbol{\angle EAF} \qquad \textbf{(1)}$$

No ievilktu četrstūru un ievilktu leņķu īpašībām

$$\boldsymbol{\angle ACD}=180°-\angle ABD=\angle ABF=\boldsymbol{\angle AEF} \qquad \textbf{(2)}$$

No (1) un (2) seko, ka ΔACD~ΔAEF.
No ∠ACB=∠ADB un ∠AEB=∠AFB seko, ka ΔACE~ΔADF. Tāpēc AC:AM=AD:AN (malas un mediānas attiecības līdzīgos trijstūros, tātad

$$AC:AD=AM:AN \qquad \textbf{(3)}$$

Bez tam ∠CAM=∠DAN (leņķi starp atbilstošajām malām un mediānām līdzīgos trijstūros). Atņemot no šīs vienādības abām pusēm ∠DAM, iegūstam

$$\angle CAD=\angle MAN \qquad \textbf{(4)}$$

No (3) un (4) seko ΔCAD~ΔMAN, k.b.j.

12.5. Atbilde: a) jā, **b)** nē.

Risinājums. Apskatām vispirms gadījumu ar galīgu daudzumu daļu. Pieņemsim, ka šīs daļas ir A_1, A_2, ..., A_n un daļa A_i nesatur nevienu skaitļa x_i daudzkārtni, i=1; 2; ...; n. Skaitlis $x = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n$ pieder vienai no šīm daļām; pieņemsim, ka $x \in A_i$. Tad no vienādības

$$x = x_i \cdot (x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n)$$

seko pretruna ar pieņēmumu.

Tagad parādīsim, ka bezgalīga daļu daudzuma gadījumā uzdevumā minētā situācija ir iespējama. Kopā A_1 ieskaitīsim vieninieku un visus pirmskaitļus. Katram i, $i \geq 2$, kopā A_i ieskaitīsim tos skaitļus, kas dalās ar tieši i dažādiem pirmskaitļiem.

Katram naturālam i daļa A_i nesatur nevienu daudzkārtni skaitlim $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_i \cdot p_{i+1}$, kur p_1, p_2, ..., p_i, p_{i+1} - dažādi pirmskaitļi (izmantojam aritmētikas pamatteorēmu).