Latvijas 57. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

9. klase

1. Dots, ka $x \neq y$ un $x^2 - 2007x = y^2 - 2007y$. Aprēķiniet $x + y$ vērtību.

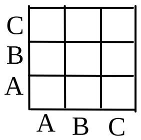
2. a) Vai var gadīties, ka katram no kvadrātvienādojumiem $x^2 + px + q = 0$, $x^2 + (p+1)x + (q+1) = 0$ un $x^2 + (p+2)x + (q+2) = 0$ abas saknes ir veseli skaitļi?

b) Vai var gadīties, ka bez tam arī vēl katram no kvadrātvienādojumiem $x^2 + (p-1)x + (q-1) = 0$ un $x^2 + (p-2)x + (q-2) = 0$ abas saknes ir veseli skaitļi? (Saknes var būt arī vienādas.)

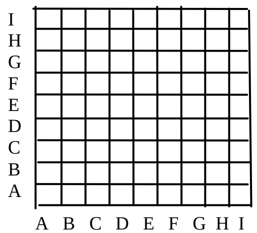
3. Šaurleņķu trijstūrī ABC nogrieznis AM ir mediāna, bet nogrieznis BN – augstums. Dots, ka $\angle MCA = 2 \cdot \angle MAC$. Pierādīt, ka $BC = 2 \cdot AN$.

4. Kvadrāts sastāv no 7×7 vienādām kvadrātiskām rūtiņām . Dažas no tām nokrāsotas melnas tā, ka katrā kolonnā un katrā rindā ir pāra skaits melnu rūtiņu (varbūt neviena). Kāds var būt kopējais melno rūtiņu skaits?

5. a) Vai var 1. zīm. parādītās tabulas rūtiņās ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai izpildītos īpašība: ja rinda un kolonna apzīmētas ar vienādiem burtiem, tad tajās ierakstīto skaitļu reizinājumi ir vienādi?



1. zīm.



2. zīm.

b) Vai var 2.zīm. parādītās tabulas rūtiņās ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 81 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai izpildītos tāda pati īpašība?

10. klase

1. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi x un y, ka izteiksmes $x^2 - y^2 - x + y$ vērtība ir

a) 10,

b) 2007?

2. Pa apli izvietoti n trauciņi, $n \geq 3$; dažos no tiem atrodas monētas (varbūt tikai viena vai neviena monēta). Monētu pavisam ir tieši n. Ja ir vismaz viens trauciņš, kurā atrodas ne mazāk par 2 monētām, tad ar vienu gājienu atļauts izvēlēties vienu no šādiem trauciņiem, izņemt no tā 2 monētas un ielikt tās pa vienai abos blakus esošajos trauciņos. Ar iegūto situāciju drīkst izpildīt tādu pašu gājienu, utt.

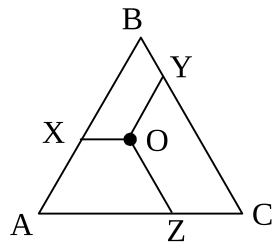
Sākotnēji visas monētas atrodas vienā trauciņā. Vai var panākt, lai katrā trauciņā būtu tieši viena monēta, ja a) n = 7, b) n = 10?

3. Ja n - naturāls skaitlis, kas lielāks par 1, tad ar x(n) apzīmējam lielāko pirmskaitli, kas nepārsniedz n, bet ar y(n) - mazāko pirmskaitli, kas pārsniedz n. Piemēram, x(6) = 5; x(5) = 5; y(5) = 7. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{x(2)\cdot y(2)} + \frac{1}{x(3)\cdot y(3)} + \frac{1}{x(4)\cdot y(4)} + \ldots + \frac{1}{x(600)\cdot y(600)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{601}$$

4. Regulāra trijstūra ABC iekšpusē izvēlas patvaļīgu punktu O. Uz trijstūra malām AB, BC, CA attiecīgi atrod tādus punktus X, Y, Z, ka OX||CA, OY||AB, OZ||BC (skat. 3.zīm.).

Pierādīt, ka nogriežņu OX, OY, OZ vidusperpendikulu veidotā trijstūra laukums nav atkarīgs no O izvēles.



3. zīm.

5. Uz papīra lapas uzrakstīti n dažādi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 14. Ir zināms: katru no naturāliem skaitļiem 1;2;3;…;27 var izsacīt vai nu kā x, vai kā $2x$, vai kā $x + y$, kur x un y - kaut kādi uzrakstītie skaitļi.

Pierādīt, ka

a) $n \geq 6$,

b) $n \geq 7$.

Latvijas 57. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

11. klase

1. Dots, ka n - naturāls skaitlis.

a) vai skaitļiem n un $n+2007$ ciparu summas var būt vienādas?

b) vai skaitļiem n un $n+199$ ciparu summas var būt vienādas?

2. Vai eksistē tādi trīs kvadrāttrinomi, ka katram no tiem ir vismaz viena sakne, bet nekādu divu kvadrāttrinomu summai sakņu nav?

3. Katra papīra lapas puse sadalīta 3 daudzstūros. Vienā pusē viens daudzstūris nokrāsots balts, otrs - sarkans, trešais - zaļš.
Pierādīt: daudzstūrus lapas otrā pusē arī var nokrāsot vienu baltu, vienu sarkanu un vienu zaļu tā, lai vismaz trešā daļa no lapas laukuma būtu nokrāsota vienādi no abām pusēm.

4. Uz trijstūra ABC mediānas AM ņemts tāds punkts K, ka $\angle BAC + \angle BKC = 180°$. Pierādīt, ka $AB \cdot KC = AC \cdot KB$.

5. Reālu skaitļu virknē $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dots, ka $a_{11} = 4, a_{22} = 2$ un $a_{33} = 1$. Bez tam visiem naturāliem n pastāv vienādība $\frac{a_{n+3} - a_{n+2}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{a_{n+3} + a_{n+2}}{a_n + a_{n+1}}$.

Pierādīt, ka

a) neviens virknes loceklis nav 0,

b) virkne ir periodiska,

c) $a_1^k + a_2^k + \ldots + a_{100}^k$ ir naturāla skaitļa kvadrāts, ja k - patvaļīgs naturāls skaitlis.

12.klase

1. Kādi var būt nenegatīvi reāli skaitļi a un b, ja vienādojumiem $x^2 + a^2x + b^3 = 0$ un $x^2 + b^2x + a^3 = 0$ ir kopīga reāla sakne?

2. Katrā n-stūra prizmas virsotnē ierakstīts vai nu „+1”, vai „-1”. Zināms, ka katras skaldnes virsotnēs ierakstīto skaitļu reizinājums ir „-1”.
Vai var būt, ka

a) n=4,

b) n=10?

3. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = y^2 \\ \sin^2 y + \cos^2 x = x^2 \end{cases}$$

4. Divas riņķa līnijas w_1 un w_2 krustojas divos punktos A un B. Taisne t_1 iet caur B un krusto w_1 vēl punktā C, bet w_2 - vēl punktā E. Taisne t_2 iet caur B un krusto w_1 vēl punktā D, bet w_2 - vēl punktā F. Punkts B atrodas gan starp C un E, gan starp D un F. Nogriežņu CE un DF viduspunktus apzīmējam attiecīgi ar M un N.
Pierādīt, ka trijstūri ACD, AEF un AMN ir līdzīgi viens otram.

5. Naturālo skaitļu kopa sadalīta daļās tā, ka katrs naturāls skaitlis nonācis tieši vienā daļā un katrā daļā ir bezgalīgi daudz skaitļu. Vai noteikti starp daļām atradīsies tāda, kas satur jebkura naturāla skaitļa daudzkārtni?
Atbildēt uz šo jautājumu, ja

a) daļu ir galīgs daudzums,

b) daļu ir bezgalīgi daudz.