Latvijas 58. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

9. klase

1. Dots, ka x un y – naturāli skaitļi. Pierādīt, ka mazākais naturālais skaitlis, kas dalās gan ar x, gan ar y, nav $x+y$.

2. Dots, ka a, b un c – pozitīvi skaitļi, pie tam pastāv vienādības $ab = \frac{c-a+1}{b} = \frac{c+1}{2}$. Pierādīt, ka

- b = 1,
- viens no skaitļiem a, b, c ir divu pārējo summas puse.

3. Katrs riņķa līnijas punkts nokrāsots vai nu balts, vai sarkans. Ir zināms: ja kāds vienādmalu trijstūris ievilkts šajā riņķa līnijā, tad vismaz 2 no tā virsotnēm ir baltas.

Pierādīt: eksistē tāds šajā riņķa līnijā ievilkts kvadrāts, kuram vismaz 3 virsotnes ir baltas.

4. Dots, ka ABC – trijstūris, bet X un Y – tādi punkti, ka $\angle AXB = \angle BYC = 90°$. Pierādīt, ka nogrieznis XY nav garāks par ΔABC pusperimetru.

5. Dotas 27 lodītes. Uz tām uzrakstīti numuri – naturālie skaitļi no 1 līdz 27 (uz katras lodītes – cits skaitlis). Lodītes kaut kā saliktas baltā, sarkanā un melnā kastē (katra lodīte ir vienā kastē). Zināms, ka baltajā kastē esošo lodīšu numuru vidējais aritmētiskais ir 15; sarkanajā kastē esošo lodīšu numuru vidējais aritmētiskais ir 3; melnajā kastē esošo lodīšu numuru vidējais aritmētiskais ir 18. Cik lodīšu var būt baltajā kastē?

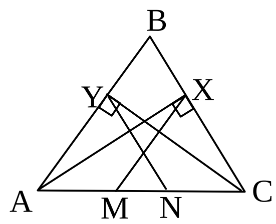
10. klase

1. Dots, ka a, b un c ir pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka $(1+ab)(1+ac)(1+bc) \geq 8abc$.

2. Kuriem naturāliem skaitļiem x piemīt īpašība: nosvītrojot x trīs pēdējos ciparus, iegūst $\sqrt[3]{x}$?

3. Ja x un y – naturāli skaitļi (varbūt vienādi), tad ar $[x,y]$ apzīmējam to mazāko kopīgo dalāmo. Kādus naturālus skaitļus n var izteikt formā $n = [x,y] + [y,z] + [z,x]$?

4. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkti augstumi AX un CY. Uz malas AC atzīmēti M un N tā, ka $XM \parallel AB$ un $YN \parallel BC$ (skat. 1.zīm.). Pierādīt, ka punkti X, Y, M un N atrodas uz vienas riņķa līnijas.



1. zīm.

5. Universitātē strādā 12 profesori. No tiem sastādītas 2008 padomes. Nekādas divas padomes nesastāv no vieniem un tiem pašiem profesoriem, bet katrām divām padomēm var atrast vismaz vienu profesoru, kas piedalās tajās abās.

Pierādīt, ka var nodibināt vismaz vēl vienu padomi tā, lai abi minētie nosacījumi joprojām izpildītos.

Latvijas 58. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

11. klase

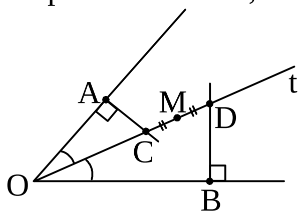
1. Ar kādu mazāko gājienu skaitu šaha zirdziņš var nonākt no šaha galdiņa kreisā apakšējā stūra uz labo augšējo stūri?

2. Atrisināt vienādojumu

$$\left|\ldots\left|\left|\left|x-1\right|-10\right|-10^{2}\right|-\ldots-10^{2007}\right|=10^{2008}.$$

3. Dots, ka n – naturāls skaitlis un skaitļa n^2 decimālajā pierakstā viens cipars ir „2”, bet pārējie cipari ir „1”. Pierādīt, ka n dalās ar 11.

4. Stars t ir $\angle AOB$ bisektrise, $CA \perp OA$ un $DB \perp OB$ (skat. 2. zīm.). Punkts M ir CD viduspunkts. Pierādīt, ka MA = MB.



2. zīm.

5. Kvadrāts sastāv no 10×10 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katra rūtiņa nokrāsota vienā no 10 krāsām; katrā krāsā nokrāsotas tieši 10 rūtiņas. Pierādīt: var atrast vai nu tādu rindu, vai tādu kolonnu, kurā sastopamas vismaz 4 krāsas.

12.klase

1. Vai eksistē tādi reāli skaitļi a, b un c, ka $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$?

2. Vienā un tai pašā koordinātu sistēmā 0xy uzzīmēti funkciju $y=x^2+x+a$ un $x=y^2+y+b$ grafiki (a un b – konstantes). Zināms, ka tie krustojas 4 punktos. Pierādīt, ka šie 4 punkti atrodas uz vienas riņķa līnijas.

3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$x^2+(x+1)^2=y^2, \text{ ja } x\le 200.$$

4. Dots, ka ABC ir šaurleņķu trijstūris, $AB > AC$ un $\angle BAC = 60°$. Apvilktās riņķa līnijas centrs ir O, bet augstumu krustpunkts ir H. Taisne OH krusto malas AB un AC attiecīgi punktos P un Q. Pierādīt, ka PO = HQ.

5. Uz taisnes atrodas figūriņa. Andris un Maija spēlē spēli. Viņi izdara gājienus pamīšus; sāk Andris. Andris ar savu kārtējo gājienu nosauc pozitīvu skaitli, kas nepārsniedz 1; pēc tam Maija pārbīda figūriņu pa taisni par Andra nosaukto attālumu uz to pusi, uz kuru viņa vēlas. Maija nedrīkst 12 reizes pēc kārtas bīdīt figūriņu vienā virzienā. Vai Andris var panākt, lai figūriņa nonāk tālāk nekā attālumā 2008 pa labi no sākotnējās atrašanās vietas, pat ja Maija cenšas to nepieļaut?