9.1. Saskaņā ar Vjeta teorēmu $\left|x_1^2-x_2^2\right|=1 \Leftrightarrow \left|(x_1-x_2)(x_1+x_2)\right|=1 \Leftrightarrow \left|x_1-x_2\right|=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{1}{4}-a}=1 \Leftrightarrow a=0$,

kā arī $\left|x_1^3-x_2^3\right|=1 \Leftrightarrow \left|(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\right|=1 \Leftrightarrow \left|\sqrt{1-4a}\left((x_1+x_2)^2-x_1x_2\right)\right|=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-4a}\left|1-a\right|=1 \Leftrightarrow 4a^3-9a^2+6a=0 \Leftrightarrow a=0$.

9.2. Atbilde: trīs skaitļi.

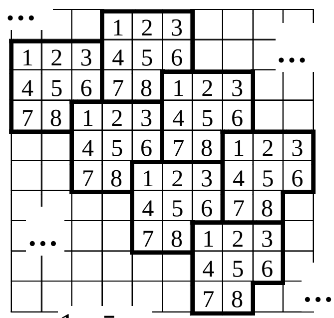
Risinājums: triju skaitļu piemērs ir 33=3·11, 34=2·17, 35=5·7. No četriem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar 4; ja tas pats nav 4, tad tas nav vienkāršs. Tieši pārbaudot četru pēc kārtas ņemtu skaitļu komplektus, kas satur „4”, redzam, ka neviens no tiem neder.

9.3. Atbilde: k=8.

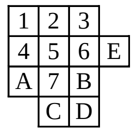
Krāsojumu ar 8 krāsām skat. 1. zīm.

Parādīsim, ka ar 7 krāsām nepietiek.

Viegli saprast, ka 2. zīm. rūtiņās 1÷7 visām krāsām jābūt dažādām, un izvairīties no 8. krāsas var tikai, krāsojot A krāsā 3 un B – krāsā 1. Cenšoties tālāk izvairīties no 8. krāsas, pakāpeniski iegūstam C=2 un D=4. Bet tad rūtiņai E nav piemērotas krāsas.

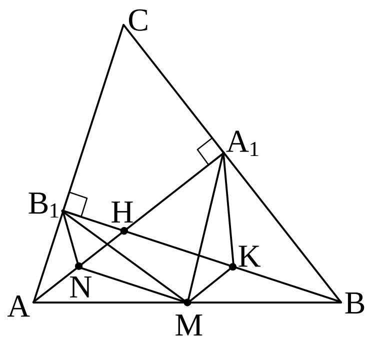


1. zīm.



2. zīm.

9.4. No viduslīniju īpašībām trijstūrī AHB iegūstam $\mathrm{NM}=\frac{1}{2}\mathrm{HB}$ un $\mathrm{KM}=\frac{1}{2}\mathrm{AH}$; tā kā mediāna pret hipotenūzu ir puse no hipotenūzas, tad $\mathrm{B_1N}=\frac{1}{2}\mathrm{AH}=\mathrm{MK}$ un $\mathrm{A_1K}=\frac{1}{2}\mathrm{HB}=\mathrm{MN}$, kā arī $\mathrm{A_1M}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\mathrm{B_1M}$. Pielietojam pazīmi *mmm*.

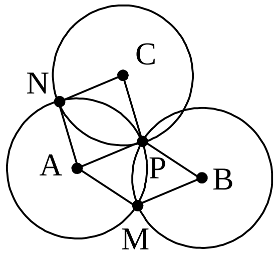


3. zīm.

9.5. a) pieņemsim, ka A noslēgumā ir visvairāk uzvaru. Ņemsim jebkuru citu tenisistu B. Ja A uzvarējis B, tad A ir spēcīgāks par B. Ja A zaudējis pret B, tad nevar būt, ka nav tāda C, ka A→C→B; ja tāda C nebūtu, tad B būtu vairāk uzvaru nekā A (uzvaras pret visiem tiem, pret ko uzvarējis A, un vēl uzvara savstarpējā spēlē ar A.)

b) pieņemsim, ka turnīra noslēgumā ir 2 čempioni A un B, un to savstarpējā spēlē uzvarējis A. Aplūkosim visus tos spēlētājus, pret kuriem A ir zaudējis (tādiem jābūt, jo citādi B nevar būt čempions). Šo spēlētāju „apakšturnīra” čempions ir arī visa turnīra čempions (tieša pārbaude). Tātad, ja turnīrā ir 2 čempioni, tad ir arī trešais.

10.1. Viegli redzēt, ka ANCP un BMAP ir rombi, tāpēc nogriežņi NC un MB ir vienādi un paralēli. No tā seko vajadzīgais.



4. zīm.

10.2. Pastāv divas iespējas:

a) apskatāmie skaitļi ir $3k+1;\ 3k+2;\ 3k+4;\ 3k+5;\ \ldots;\ 3k+3n-2;\ 3k+3n-1$. To summa ir $(6k+3)+(6k+9)+\ldots+(6k+6n-3)=\frac{n}{2}\left(6k+3+6k+6n-3\right)=3n(2k+n)$, tātad $n(2k+n)=100$. Abi reizinātāji ir ar vienādu paritāti, tātad pāra skaitļi. Apskatot, kā 100 var sadalīt reizinātājos, iegūstam $n=2$ vai $n=10$; attiecīgi $k=24$ vai $k=0$.

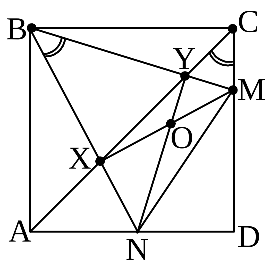
b) apskatāmie skaitļi ir $3k+2; 3k+4; 3k+5; 3k+5; ...; 3k+3n-2; 3k+3n-1; 3k+3n+1$. To summa pārsniedz a) summu par $(3k+3n+1)-(3k+1)=3n$, tātad ir $3n(2k+n)+3n=3n(2k+n+1)$. Iegūstam $n(n+2k+1)=100$. Šoreiz n un $(n+2k+1)$ ir dažādas paritātes, un otrais reizinātājs ir lielāks. Iegūstam iespējas $n=1,\ k=49$; $n=4,\ k=10$; $n=5,\ k=7$.

10.3. Sešpadsmit skaitļu gadījumā Andris ar 5 jautājumiem tos visus nevar aptvert. Ar 6 jautājumiem $a_1a_2a_3$; $a_1a_4a_5$; $a_1a_6a_7$; $a_8a_9a_{10}$; $a_{11}a_{12}a_{13}$; $a_{14}a_{15}a_{16}$, sareizinot iegūtās atbildes, Andris sasniedz mērķi.

Septiņpadsmit skaitļu gadījumā Andris sasniedz mērķi ar 7 jautājumiem $a_1a_2a_3$; $a_1a_2a_4$; $a_1a_2a_5$; $a_6a_7a_8$; $a_9a_{10}a_{11}$; $a_{12}a_{13}a_{14}$; $a_{15}a_{16}a_{17}$.

10.4. Tā kā $|a+b|\le|a|+|b|$, tad neviens saskaitāmais nepārsniedz 1, un $S\le 3$. Divi no skaitļiem *x; y; z* ir ar vienādu zīmi; attiecīgais saskaitāmais ir 1, tātad $S\ge 1$. Ja $x=y=z=1$, tad $S=3$; ja $x=y=1,\ z=-1$, tad $S=1$. Pieņemsim, ka $1<a<3$. Viegli pārbaudīt, ka pie $x=1$ un $y=z=\frac{a-3}{a+1}$ iegūstam $S=a$. Tātad *S* vērtību apgabals ir $[1;\ 3]$.

10.5. Tā kā ∠MBX=45°=∠MCX, tad punkti B; C; M; X atrodas uz vienas riņķa līnijas. Tā kā ∠BCM=90°, tad ∠BXM=180° - 90° = 90°. Tātad MX ir ΔNBM augstums. Līdzīgi pierāda, ka NY arī ir ΔNBM augstums. Tātad O ir ΔNBM augstumu krustpunkts, no kā seko vajadzīgais.



5. zīm.

11.1. Atbilde: 3.

Atrisinājums: progresijas ar 3 locekļiem ir, piemēram, 1; 2; 3 vai 2; 5; 8. Pieņemsim, ka progresijas pirmie divi locekļi ir $f_k = a$ un $f_m = f_k + d = a + d > d$. Ievērosim, ka $f_{m+1} > f_m$ un $f_{m+2} = f_m + f_{m+1} > f_m + d$. Tātad trešais progresijas loceklis **var būt** tikai f_{m+1}; tad jau nākošais Fibonači skaitlis $f_{m+2} = f_{m+1} + f_m > f_{m+1} + d$ ir pārāk liels, lai ietilptu mūsu progresijā. Tātad vairāk par 3 locekļiem nevar būt.

11.2. Tā kā $3^3 - 3 = 24$, tad meklējamais d nevar būt lielāks par 24. Pierādīsim, ka visi apskatāmie skaitļi dalās ar 24; tad būs pierādīts, ka $d = 24$. Pie nepāra $n = 2k+1$ $n^n - n = n(n^{2k} - 1) = n(n^2 - 1)(n^{2k-2} + \ldots + n^2 + 1) = (n-1)n(n+1) \cdot Q$, Q – vesels skaitlis. Skaitļi *n-1* un *n+1* ir viens otram sekojoši pāra skaitļi; tāpēc to reizinājums dalās ar 8. Viens no skaitļiem *n–1*; *n*; *n+1*; dalās ar 3. Tā kā LKD(3; 8)=1, tad *(n–1)n(n+1)* dalās ar 24.

11.3. Atņemot pirmo vienādojumu no otrā, iegūstam

$$(x^3 - y^3) = (x^2 - y^2) - (x - y)$$

$$(x-y)\left(x^2 + xy + y^2 - x - y + 1\right) = 0$$

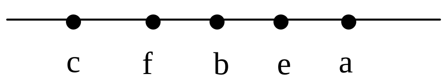
$$\frac{1}{2}(x-y)\left[(x+y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2\right] = 0$$

Acīmredzami kvadrātiekava nav 0, tāpēc iegūstam $x = y$. Tālāk seko vienādojums $x^3 - x^2 - x = 0$, no kurienes $x_1 = y_1 = 0$; $x_{2,3} = y_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

11.4. Apskatīsim visas Andra izvēlēto skaitļu starpības, no lielāka skaitļa atņemot mazāku. Šādu starpību pavisam ir 45. Tā kā tās ir robežās no 1 līdz 36 , starp tām ir divas vienādas. Pieņemsim, ka tās ir a–b un c–d, kur a>c. Ja visi skaitļi a; b; c; d ir dažādi, tad no a–b=c–d seko a+d=b+c, un Maija var izvēlēties a; b; c; d. Atliek gadījums, kad b=c. Analizēsim sīkāk apskatāmo 45 starpību sistēmu. Pastāv divas iespējas.

A. Starp tām ir 3 vienādas; varam pieņemt, ka a–b=c–d=e–f, kur a>c>e. Ja b≠c **vai** d≠e, rīkojamies kā iepriekš. Ja būtu b=c un d=e, tad nevar būt b=e; tādā gadījumā iznāktu c=b=e=d un c–d=0 – pretruna. Tāpēc vajadzīgos skaitļus iegūstam no vienādības a–b=e–f ⇔ a+f=b+e.

B. Starp 45 starpībām nav triju vienādu; tad ir 9 pāri vienādu starpību. Ja divi no šiem pāriem ir a–b=b–c un e–b=b–f (ar vienu un to pašu b), tad

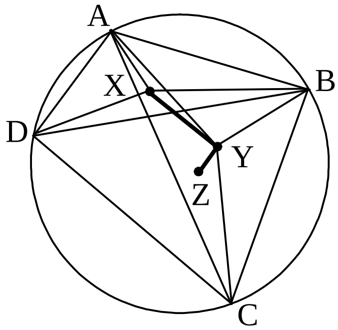


6. zīm.

a–e=f–c, un mēs iegūstam a+c=e+f. Ja katram vienādo starpību pārim ir cits b, tad iznāk 9 dažādi b, bet tas nevar būt, jo b nav ne mazākais, ne lielākais no Andra izvēlētajiem 10 skaitļiem.

Visas iespējas izanalizētas.

11.5. Ja X un Y ir attiecīgi ΔABD un ΔABC iecentri, tad $\angle AYB = 180° - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB$ un līdzīgi $\angle AXB = 90° + \frac{1}{2}\angle ADB$. Tā kā $\angle ACB = \angle ADB$, tad $\angle AYB = \angle AXB$. Tātad punkti A, X, Y, B atrodas uz vienas riņķa līnijas, tātad $\angle XYB = 180° - \frac{1}{2}\angle DAB$. Ja Z ir ΔBCD iecentrs, tad līdzīgi iegūstam $\angle ZYB = 180° - \frac{1}{2}\angle DCB$. Tāpēc $\angle XYZ = 360° - \angle XYB - \angle ZYB = \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle DCB) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.
Līdzīgi pierāda, ka arī citi vajadzīgie leņķi ir taisni.

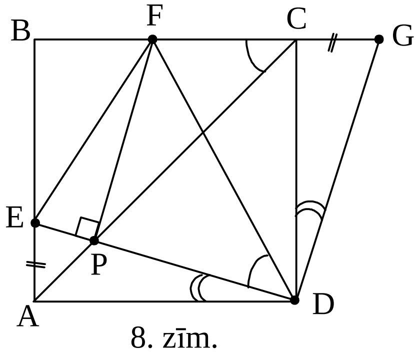


7. zīm.

12.1. Skaidrs, ka $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \ldots = x_{12} + y_{12} = 11$ un $x_1 + \ldots + x_{12} = y_1 + \ldots + y_{12}$ (katrā spēlē viens uzvar un viens zaudē). Tāpēc $y_1 + \ldots + y_{12} = 12 \cdot 11 \cdot \frac{1}{2}$ un
$x_1^2 + \ldots + x_{12}^2 = (11 - y_1)^2 + \ldots + (11 - y_{12})^2 = 121 \cdot 12 - 22(y_1 + y_2 + \ldots + y_{12}) + (y_1^2 + \ldots + y_{12}^2) =$
$= 121 \cdot 12 - 22 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \frac{1}{2} + (y_1^2 + \ldots + y_{12}^2) = y_1^2 + \ldots + y_{12}^2$, k.b.j.

12.2. Ja Katrīnas uzrakstītais skaitlis ir $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, tad visu sešu no cipariem a; b; c izveidojamo skaitļu summa ir $222(a+b+c)$, bet Maijas uzrakstīto skaitļu summa ir $122a + 212b + 221c = 5(a+b+c) + 9(13a + 23b + 24c)$. Tā kā $3434 \equiv 5 \pmod 9$, tad arī $5(a+b+c) \equiv 5 \pmod 9$. No šejienes seko, ka $a+b+c \equiv 1 \pmod 9$. Tā kā $6 \le a+b+c \le 24$, tad $a+b+c = 10$ vai $a+b+c = 19$.
Ja $a+b+c = 10$, tad $n = 222 \cdot 10 - 3434 < 0$ - pretruna. Ja $a+b+c = 19$, tad $n = 222 \cdot 19 - 3434 = 784$. Tas arī apmierina visas uzdevuma prasības.

12.3. Atliekam uz BC pagarinājuma $CG = AE$. Tad $\Delta DAE = \Delta DCG$, tāpēc $\angle ADE = \angle CDG$; tātad $\angle EDG = 90°$. Ap $DPFC$ var apvilkt riņķa līniju ($\angle P + \angle C = 180°$), tāpēc $\angle PDF = \angle PCF = 45°$. Tāpēc $\angle FDG = 90° - 45° = 45°$. Iegūstam, ka $\Delta EDF = \Delta GDF$ (*mlm*), tātad $EF = GF = GC + CF = AE + CF$, k.b.j.



8. zīm.

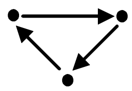
12.4. Pierādīsim, ka tāda vārdnīcu sistēma iespējama jebkuram nepāra skaitam valodu n, n≥3.

Bāze. Pie n=3 rīkojamies, kā redzams 9. zīm.

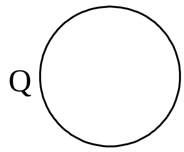
Induktīvā pāreja. Pieņemsim, ka k valodām vārdnīcu shēma ietverta apgabalā Q (10. zīm.) Pievienojot vēl 2 valodas A un B, izveidojam shēmu, kas redzama 11. zīm.:

- ieviešam vārdnīcas, kas ļauj tulkot no A uz katru no iepriekšējām k valodām;
- ieviešam vārdnīcas, kas ļauj tulkot no katras no iepriekšējām k valodām uz B;
- ieviešam vārdnīcu, kas ļauj tulkot no B uz A.

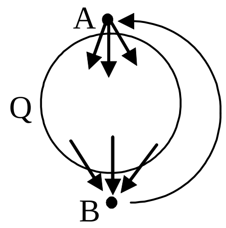
To, ka papildinātā vārdnīcu sistēma apmierina uzdevuma prasības k+2 valodām, pārbauda tieši, apskatot visas iespējas. Uzdevums atrisināts.



9. zīm.



10. zīm.



11. zīm.

12.5. Vienādojums pārveidojas par $x^4+x^3-2x^2-6ax-4a^2=0$.

Pārrakstīsim to formā $4a^2+6xa-x^4-x^3+2x^2=0$ un apskatīsim kā vienādojumu attiecībā uz a ar parametru x. Viegli iegūstam $a_1=-\frac{1}{2}x^2-x$ un $a_2=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$. Tāpēc sākotnējais vienādojums pārveidojas par $(x^2+2x+2a)(x^2-x-2a)=0$. No šejienes $x=-1\mp\sqrt{1-2a}$, ja $a<-\frac{1}{8}$; $x=-1\mp\sqrt{1-2a}$ un $x=\frac{1}{2}\mp\sqrt{\frac{1}{4}+2a}$, ja $-\frac{1}{8}\le a\le\frac{1}{2}$; $x=\frac{1}{2}\mp\sqrt{\frac{1}{4}+2a}$, ja $a>\frac{1}{2}$.