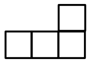
Latvijas 59. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

9. klase

1. Dots, ka *a* ir tāds reāls skaitlis, ka kvadrātvienādojumam $x^2 - x + a = 0$ ir divas dažādas reālas saknes x_1 un x_2. Pierādīt: $\left|x_1^2 - x_2^2\right| = 1$ tad un tikai tad, ja $\left|x_1^3 - x_2^3\right| = 1$.

2. Naturālu skaitli sauc par vienkāršu, ja tas ir divu (vienādu vai dažādu) pirmskaitļu reizinājums. Piemēram, 9=3·3 ir vienkāršs, bet 18=2·3·3 – nav. Kāds lielākais daudzums pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu var visi būt vienkārši?

3. Plakne sadalīta vienādos kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Katrs kvadrātiņš nokrāsots vienā no *k* krāsām. Ir zināms: katrā tādā figūrā, kāda redzama 1. zīm. (šī figūra var būt arī pagriezta vai apgriezta „uz mutes”), visas rūtiņas nokrāsotas dažādās krāsās. Kāda ir mazākā iespējamā *k* vērtība?

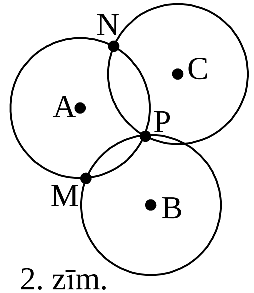

1. zīm.

4. Šaurleņķu trijstūrī ABC nogriežņi AA_1 un BB_1 ir augstumi, H ir augstumu krustpunkts, punkti M, N un K ir attiecīgi nogriežņu AB, AH un BH viduspunkti. Pierādīt, ka $\Delta MKA_1 = \Delta B_1NM$.

5. Turnīrā piedalās 12 tenisisti. Katrs ar katru citu spēlē tieši vienu reizi; katrā spēlē viens no tās dalībniekiem uzvar, bet otrs – zaudē. Teiksim, ka tenisists A ir spēcīgāks par tenisistu B, ja vai nu A uzvarējis pret B, vai arī var atrast tādu trešo tenisistu C, ka A uzvarējis pret C, bet C uzvarējis pret B. Par čempionu sauc jebkuru tādu tenisistu, kurš turnīra noslēgumā izrādās spēcīgāks par jebkuru citu. Pierādīt:
a) katrs tenisists, kam turnīra noslēgumā ir vislielākais uzvaru skaits, ir čempions,
b) nevar būt, ka turnīra noslēgumā ir tieši divi (ne vairāk un ne mazāk) čempioni.

10. klase

1. Trīs vienādas riņķa līnijas krustojas punktā P. Apzīmējam riņķa līniju centrus un divus no pārējiem krustpunktiem, kā parādīts 2. zīm. Pierādīt, ka MNCB ir paralelograms.



2. zīm.

2. Apskatām virkni, kas augošā secībā satur visus naturālos skaitļus, kuri nedalās ar 3. Virknes sākums tātad ir

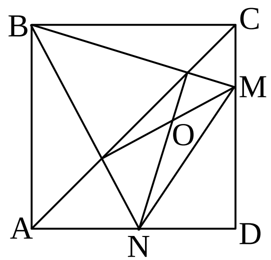
1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; ...

Dots, ka 2*n* pēc kārtas ņemtu virknes locekļu summa ir 300 (*n* – kaut kāds naturāls skaitlis). Kādas ir iespējamās *n* vērtības?

3. Maija uz katras no 16 kartītēm uzrakstījusi „+1” vai „-1”. Kartītes novietotas uz galda tā, ka Andris pašas kartītes gan redz, bet uz tām uzrakstītos skaitļus neredz. Andris ar vienu jautājumu var norādīt uz jebkurām trim kartītēm un uzzināt no Maijas uz tām uzrakstīto skaitļu reizinājumu. Ar kādu mazāko jautājumu skaitu Andrim pietiek, lai noskaidrotu visu 16 skaitļu reizinājumu?
Vai 17 kartīšu gadījumā Andrim pietiek ar 7 jautājumiem?

4. Kādas vērtības var pieņemt izteiksme $S = \frac{|x+y|}{|x|+|y|} + \frac{|x+z|}{|x|+|z|} + \frac{|y+z|}{|y|+|z|}$, ja *x*, *y*, *z* – no nulles atšķirīgi reāli skaitļi?

5. Dots, ka ABCD – kvadrāts un ∠MBN=45° (skat. 3.zīm.). Pierādīt, ka BO⊥MN.



3. zīm.

Latvijas 59. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

11. klase

1. Apskatām skaitļu virkni $F_1=1$; $F_2=2$; $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ pie $n\geq 1$. Kāds lielākais šīs virknes elementu daudzums var veidot vienu aritmētisku progresiju?

2. Atrast skaitļu 3^3-3; 5^5-5; 7^7-7; ...; $2009^{2009}-2009$ lielāko kopīgo dalītāju.

3. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x+y^2=y^3 \\ y+x^2=x^3 \end{cases}$$

reālos skaitļos.

4. Andris uzrakstījis 10 dažādus veselus pozitīvus skaitļus; neviens no tiem nepārsniedz 37. Pierādīt, ka Maija var izvēlēties četrus no Andra uzrakstītajiem skaitļiem tā, ka divu Maijas izvēlēto skaitļu summa vienāda ar abu pārējo Maijas izvēlēto skaitļu summu.

5. Dots, ka četrstūris ABCD ievilkts riņķa līnijā. Pierādīt: trijstūros ABC, BCD, CDA, DAB ievilkto riņķa līniju centri ir taisnstūra virsotnes.

12.klase

1. Turnīrā piedalījās 12 tenisisti. Katrs ar katru citu spēlēja tieši vienu reizi; katrā spēlē viens no tās dalībniekiem uzvarēja, bet otrs – zaudēja. Dalībnieku uzvaru un zaudējumu daudzumus apzīmēsim attiecīgi ar x_1 un y_1; x_2 un y_2; ...; x_{12} un y_{12}. Pierādīt, ka

$$x_1^2+x_2^2+...+x_{12}^2=y_1^2+y_2^2+...+y_{12}^2.$$

2. Katrīna uzrakstīja trīsciparu skaitli n, kura visi cipari ir dažādi un visi atšķiras no 0. Maija uzrakstīja visus piecus citus trīsciparu skaitļus, kas izveidoti no tiem pašiem cipariem, no kā sastāv n. Maijas uzrakstīto skaitļu summa ir 3434. Kāds var būt skaitlis n?

3. Dots, ka ABCD ir kvadrāts un E ir malas AB iekšējs punkts. Nogriežņi AC un DE krustojas punktā P. Perpendikuls, kas no P vilkts pret DE, krusto malu BC punktā F. Pierādīt, ka EF=AE+FC.

4. Uz kādas planētas izmanto 2009 valodas. Vai var izveidot vārdnīcu sistēmu tā, lai vienlaicīgi izpildītos 3 īpašības:

a) katra vārdnīca ļauj tulkot no vienas valodas uz kādu citu, bet ne pretējā virzienā,

b) ja ir vārdnīca, kas ļauj tulkot no kādas valodas A uz kādu citu valodu B, tad nav vārdnīcas, kas ļauj tulkot no B uz A,

c) no katras valodas uz katru citu var pārtulkot, izmantojot vai nu vienu, vai divas vārdnīcas? (Pieļaujamas vairākkārtīgas tulkošanas, piemēram, no A un B un tālāk no B uz C.)

5. Atrisināt vienādojumu

$$x^3(x+1)=2(x+a)(x+2a)$$

reālos skaitļos, kur a – reāla konstante.