Latvijas 60. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

9. klase

1. Vai iespējams, ka kvadrātvienādojuma $x^2 - a^2 x + b^2 = 0$, a un b – naturāli skaitļi, saknes ir divu dažādu naturālu skaitļu kvadrāti?

2. Trijstūrī ABC nogriežņi AM un CN ir bisektrises, un punkts O ir CN viduspunkts. Zināms, ka $\angle ABC = 90°$ un caur punktiem B, M, O un N var novilkt riņķa līniju. Atrast $\angle BAC$ vērtību.

3. Par *skaistu* sauksim tādu naturālu skaitli, kas nedalās ne ar vienu no cipariem savā decimālajā pierakstā (neviens skaitlis nedalās ar 0).

Kāds lielākais daudzums pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu visi var būt *skaisti*?

4. Rūtiņu lapā novietoti divi taisnstūri (var būt sakrītoši) tā, ka to malas iet pa rūtiņu malām. Teiksim, ka punkts pieder taisnstūrim, ja tas atrodas taisnstūra iekšpusē vai uz tā kontūra.

Cik no 8 šo divu taisnstūru virsotnēm var vienlaicīgi piederēt arī otram taisnstūrim?

5. Taisnstūris ar izmēriem 5×*n* rūtiņas izkrāsots šaha galdiņa kārtībā. Vienā gājienā drīkst mainīt trīs blakus rūtiņu, kas atrodas vienā rindā vai kolonnā, krāsojumu uz pretējo. Vai, veicot šādus gājienus vairākkārt, var panākt, ka visas rūtiņas ir vienā krāsā, ja

a) *n*=5,
b) *n*=3?

10. klase

1. Trijstūra malu garumi ir *a*, *b* un *c*. Pierādīt, ka

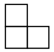
$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3\,.$$

2. Dots, ka $|a_1 - a_2| = 2|a_2 - a_3| = 3|a_3 - a_4| = \ldots = 20|a_{20} - a_1|$.

Pierādīt, ka $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{20}$.

3. Šaurleņķu trijstūrī ABC leņķa BAC bisektrise krusto malu BC punktā D. Punkti M un N ir attiecīgi malu AB un AC viduspunkti. Pierādīt, ka $\angle MDN \geq \angle BAC$.

4. Mūzikas festivālā piedalās 7 mūziķi. Katru dienu uzstājas tieši 4 no viņiem. Kāds ir mazākais iespējamais dienu skaits festivālā, pēc kura katriem diviem mūziķiem būs tāda diena, kurā viņi abi ir uzstājušies?

5. Vai kvadrātu ar izmēriem 9×9 rūtiņas var sadalīt 13 taisnstūros ar izmēriem 2×3 rūtiņas un vienā *stūrītī*  ?

Latvijas 60. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

11. klase

1. Dots, ka $a+b+c+d=8$.
Pierādīt, ka $ab+ac+ad+bc+bd+cd-a^2-b^2-c^2-d^2 \le 8$.

2. Atrast visas tādas pozitīvu skaitļu virknes a_1, a_2, ..., kurām katram $k \ge 1$ izpildās nosacījums:
$$a_1^3+a_2^3+\ldots+a_k^3=(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2.$$

3. Šaurleņķu trijstūrī ABC nogriežņi BQ un CP ir augstumi. Caur punktiem A, P un Q ir novilkta riņķa līnija ω. No punkta Q pret taisni AB vilktais perpendikuls krusto riņķa līniju ω punktā T. Zināms, ka TB ir r.l. ω pieskare un $AT=TB$. Pierādīt, ka $AB=AC$.

4. Par Fibonači skaitļu virkni sauc virkni $F_1=1$; $F_2=1$; $F_{i+2}=F_i+F_{i+1}$ pie $i\ge1$. Pierādīt, ka katram naturālam skaitlim n Fibonači skaitļu virknē ir tāds virknes loceklis, kas dalās ar n.

5. Starp 10 pilsētām ir uzbūvēti 24 ceļi. Katrs ceļš savieno divas pilsētas un starp katrām 2 pilsētām ir ne vairāk kā viens ceļš, ceļi ārpus pilsētām nekrustojas. Zināms, ka no katras pilsētas ir iespējams aizbraukt uz katru citu, braucot tikai pa ceļiem (iespējams, caur citām pilsētām).

a) Pierādīt, ka no katras pilsētas ir iespējams aizbraukt uz katru citu, izbraucot caur ne vairāk kā 3 pilsētām.

b) Pierādīt, ka, ja ir tikai 23 ceļi, a) punkta apgalvojums nav spēkā.

12.klase

1. Doti n skaitļi $-2 \le x_1, x_2, \ldots, x_n \le 2$, kuru summa ir 0. Pierādīt, ka
$$\left|x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3\right| \le 2n.$$

2. Dota skaitļu virkne $a_1=1$; $a_2=1$; $a_i=p\cdot a_{i-1}+q\cdot a_{i-2}$ pie $i\ge3$ (p, q – doti naturāli skaitļi). Zināms, ka katram naturālam skaitlim n eksistē tāds virknes loceklis a_k, ka a_k dalās ar n.

Pierādīt, ka $p=q=1$.

3. Trijstūrī ABC mediānas AK, BG un CF krustojas punktā O. Uz malas CB atzīmēti punkti P un Q tā, ka CP=BQ<CK. AP krusto BG punktā D, bet CF – punktā H. AQ krusto BG punktā J, bet CF – punktā E.

Pierādīt, ka trijstūru OHD un OEJ laukumi ir vienādi.

4. Naturāli skaitļi no 1 līdz k kaut kādā secībā ir uzrakstīti pa apli (katrs tieši vienu reizi). Zināms, ka katram d, $2 \le d \le k-1$, izpildās sekojoša īpašība: dalot ar k visas iespējamās d pēc kārtas sekojošu skaitļu summas, iegūst visus iespējamos atlikumus.

Vai ir iespējams, ka **a)** $k=7$, **b)** $k=8$?

5. Dotas 100 kredītkartes, katrā no kurām atrodas dažādas naudas summas. Ir pieejama tāda ierīce, kurā ieliekot 4 kredītkartes, tā paziņo, kurā no šīm četrām kredītkartēm ir otra lielākā naudas summa.

Pierādīt, ka lietojot šo ierīci **a)** 100 reizes, **b)** 99 reizes, var noskaidrot, kurā no visām kredītkartēm ir lielākā naudas summa.