Latvijas 61. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

9. klase

1. Doti 4023 kvadrātvienādojumi formā $x^2+ax+b=0$. Starp visu vienādojumu a vērtībām sastopami visi veselie skaitļi no -2011 līdz 2011 (ieskaitot), tāpat arī starp b vērtībām sastopami visi veselie skaitļi no -2011 līdz 2011 (ieskaitot). Vai var gadīties, ka visiem dotajiem vienādojumiem saknes ir veseli skaitļi?

2. Uz taisnleņķa trīsstūra garākās katetes kā diametra konstruēta riņķa līnija, kas no hipotenūzas atšķeļ nogriezni, kura garums vienāds ar īsākās katetes garumu. Aprēķināt hipotenūzas un īsākās katetes garumu attiecību!

3. Parādīt, ka no visiem trīsciparu skaitļiem, kuru pierakstā nav cipara 0, var izvēlēties 81 trīsciparu skaitli tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādas trīs īpašības:

1) visos izvēlētajos skaitļos izsvītrojot pirmo ciparu, katrs divciparu skaitlis, kas nesatur 0, tiek iegūts tieši vienu reizi;

2) visos izvēlētajos skaitļos izsvītrojot otro ciparu, katrs divciparu skaitlis, kas nesatur 0, tiek iegūts tieši vienu reizi;

3) visos izvēlētajos skaitļos izsvītrojot trešo ciparu, katrs divciparu skaitlis, kas nesatur 0, tiek iegūts tieši vienu reizi.

4. Doti četri atsvari, kuru masas ir savā starpā atšķirīgas. Šie atsvari visos iespējamos veidos tika sadalīti pāros, un katrā gadījumā uz sviras svariem tika salīdzinātas abu pāru masas. Vai, zinot visu šo svēršanu rezultātus (nevienā svēršanā svaru kausi nebija līdzsvarā), iespējams noteikt:

a) vienu atsvaru, kurš ir **vai nu** vissmagākais, **vai** visvieglākais;

b) gan vissmagāko, **gan** visvieglāko atsvaru?

(Svari nerāda masu starpību, bet ļauj tikai noteikt, uz kura kausa ir lielāks smagums.)

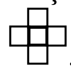
5. Trīs spēlētāji sēž pie apaļa galda un spēlē kādu spēli, kas sastāv no vairākām kārtām. Katrā kārtā viens no spēlētājiem uzvar un iegūst 3 punktus, nākamais spēlētājs pie galda pulksteņrādītāja virzienā zaudē divus punktus, bet trešais zaudē vienu punktu. Pēc visu kārtu punktu saskaitīšanas izrādījās, ka vienam no spēlētājiem summā ir 0 punktu. Vai var būt, ka kādam no pārējiem spēlētājiem summā ir **a)** 48, **b)** 49 punkti?

10. klase

1. Atrisināt vienādojumu

$$\left|\left|\left|x-2011\right|-2011\right|-2011\right|=\left|\left|\left|x-1201\right|-1201\right|-1201\right|.$$

2. Trijstūra ABC (AB>BC) bisektrise BD krusto tam apvilkto riņķa līniju ω punktā M. Uz malas AB izvēlēts punkts N tā, ka $CN \perp BM$. MN un CN vēlreiz krusto ω attiecīgi punktos K un O. Pierādīt, ka $AO=OK$.

3. Vai tabulā ar izmēriem 6×6 rūtiņas var aizkrāsot **a)** sešas, **b)** septiņas rūtiņas tā, lai no tabulas nevarētu izgriezt ne taisnstūri 1×5 rūtiņas (tas var būt novietots gan horizontāli, gan vertikāli), ne figūru , kurā neviena rūtiņa nav aizkrāsota? (Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.)

4. Dots polinoms $f(x)$ ar veseliem koeficientiem. Vai iespējams, ka $f(2011)=100$, bet $f(11)=1000$?

5. Kādam mazākajam n ir spēkā apgalvojums: jebkuriem n plaknē novietotiem punktiem (nekādi trīs no tiem nav uz vienas taisnes), var atrast divus platleņķa trijstūrus ar virsotnēm šajos punktos tā, lai šo trijstūru virsotnes nesakrīt.

Latvijas 61. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

11. klase

1. Dots, ka $a^2+b^2+c^2=1$ un $m^2+n^2+p^2=1$. Pierādīt, ka $-1 \le am+bn+cp \le 1$. (*a*, *b*, *c*, *m*, *n*, *p* – reāli skaitļi).

2. Trapeces ABCD sānu malas AD garums ir vienāds ar pamatu AB un CD garumu summu. Pierādīt, ka leņķu BAD un ADC bisektrises krustojas sānu malas BC viduspunktā.

3. Atrast visus pirmskaitļus *p*, kuriem skaitlis $p^{p^2-5}+2$ arī ir pirmskaitlis.

4. Aplī izvietoti 2011 punkti, no kuriem 707 nokrāsoti sarkanā, bet pārējie – zaļā krāsā. Tika izvēlēts viens punkts un, sākot no tā, pulksteņa rādītāja virzienā veikts pilns aplis, uz katra loka starp diviem blakus punktiem uzrakstot pa naturālam skaitlim pēc šāda likuma:

- ja pēc zaļa punkta seko sarkans punkts, tad uz loka uzrakstīja 1,
- ja pēc zaļa seko zaļš, tad uzrakstīja 2,
- ja pēc sarkana – sarkans, tad uzrakstīja 3,
- ja pēc sarkana – zaļš, tad uzrakstīja 4.

Kāda ir visu uzrakstīto skaitļu summa?

5. Plaknē doti *n* punkti. Zināms, ka jebkura trijstūra laukums, kura virsotnes atrodas šajos punktos, nepārsniedz 1 cm^2. Pierādīt, ka var uzzīmēt trijstūri ar laukumu 4 cm^2 tā, ka visi dotie punkti atradīsies šī trijstūra iekšpusē vai uz tā malām.

12.klase

1. Kurš no skaitļiem $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}-2$ un $\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{12}-2\sqrt[3]{2}$ ir lielāks?

2. Trijstūrī ABC nogriežņi AM un CN ir mediānas, kuru viduspunkti ir attiecīgi P un Q. AC krusto taisnes BP un BQ attiecīgi punktos X un Y. Pierādīt, ka $AX=XY=YC$.

3. Pierādīt, ka neeksistē tādi naturāli skaitļi *n* un *m*, kuriem ir patiesa vienādība $(2n)^{2n}-1=m^3$.

4. Atrast visas stingri augošas funkcijas $g(x)$, kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kas visiem reāliem skaitļiem *x* apmierina vienādību $g(g(x))+g(x)=2x$.

5. Virkni V, kas sastāv no cipariem 0, 1, 2, ..., 9 sauc par *universālu*, ja jebkuru virkni, kurā katrs cipars sastopams tieši vienu reizi, var iegūt no V, izsvītrojot tajā dažus ciparus. Pierādīt, ka *universāla* virkne satur vismaz 55 ciparus.