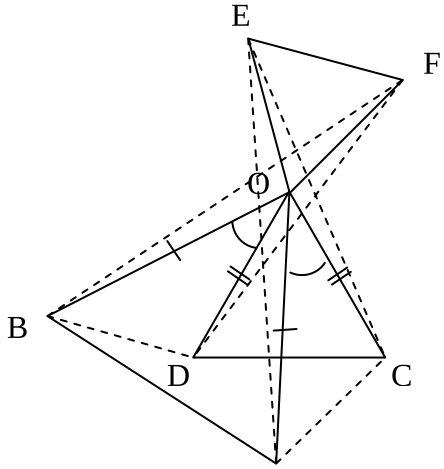
9.1. Viegli pamanīt, ka $a = 1$. Lai summas simtu cipars būtu 0, tad $b = 9$ vai $b = 8$. $b = 9$ neder, jo tad summā veidotos pārnesums no desmitu pozīcijas un simtu pozīcijā būtu cipars, kas lielāks nekā 0. Tātad $b = 8$.

$\overline{18cd}+\overline{18c}+18+1=2013$ jeb $1800+10c+d+180+c+18+1=2013 \Rightarrow 1999+11c+d=2013$ $\Rightarrow 11c+d=14$, tātad $c = 1$ un $d = 3$, jeb $\overline{abcd}=1813$.

9.2. Ievērosim, ka $\angle BOC=\angle BOD+60^\circ=60^\circ+\angle AOC$ (skat. 1. zīm.). Tāpēc $\angle BOD=\angle AOC$. Līdz ar to $\Delta BOD=\Delta AOC$ pēc pazīmes *mlm*: $BO=AO$, $\angle BOD=\angle AOC$ un $DO=CO$. Bet tad $BD=AC$, jo vienādos trijstūros pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas. Līdzīgi secinām, ka arī $DF=CE$ un $FB=EA$, tāpēc $\Delta ACE=\Delta BDF$ pēc pazīmes *mmm*.



1. zīm.

9.3. Aplūkojam virknes pirmos locekļus: $a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=\left[\frac{2\cdot1+1}{3}\right]+4=5,\ a_4=\left[\frac{2\cdot5+1}{3}\right]+4=7,$

$a_5=\left[\frac{2\cdot7+5}{3}\right]+4=10,\ a_6=\left[\frac{2\cdot10+7}{3}\right]+4=13,\ a_7=\left[\frac{2\cdot13+10}{3}\right]+4=16.$

Var ievērot, ka visiem $i\ge4$ $a_i=3i-5$. Pierādīsim to ar matemātisko indukciju.

Bāze. $a_4=3\cdot4-5=7$ un $a_5=3\cdot5-5=10$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka visiem $k < n$ ir spēkā $a_k=3k-5$.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka arī $a_n=3n-5$.

$$a_n=\left[\frac{2\cdot a_{n-1}+a_{n-2}}{3}\right]+4=\left[\frac{2\cdot(3(n-1)-5)+3(n-2)-5}{3}\right]+4=\left[\frac{2\cdot(3n-8)+3n-11}{3}\right]+4=$$
$$=\left[\frac{9n-27}{3}\right]+4=3n-9+4=3n-5$$

Apgalvojums pierādīts.
Tātad $a_{2013}=3\cdot2013-5=6034$.

9.4. Ja pieņemam, ka komanda–zaudētāja izcīnījusi a uzvaras, tad komanda–uzvarētāja izcīnījusi $a + 1$ uzvaru. Kopējais punktu skaits komandai–zaudētājai ir $a(n+3)+(a+1)n=2an+3a+n$, bet komandai–uzvarētājai $(a+1)(n+3)+an=2an+3a+n+3$.

Pierādīsim, ka komanda–uzvarētāja nevarēja izcīnīt 92 punktus. Ja tā tomēr būtu bijis, tad $2an+3a+n+3=92$ jeb eksistē tāds naturāls skaitlis a, ka $n=\dfrac{89-3a}{2a+1}$ ir naturāls skaitlis. Tā kā $n\ge1$, tad pieļaujamās a vērtības ir $1\le a\le17$. Aplūkosim skaitītāja un saucēja vērtību katrai no šīm vērtībām:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$89\text{-}3a$	86	83	80	77	74	71	68	65	62	59	56	53	50	47	44	41	38
$2a+1$	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35

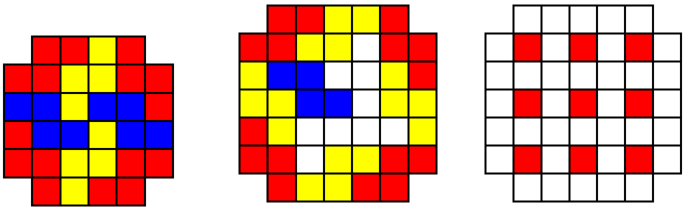
Kā redzams, nevienai no pieļaujamajām a vērtībām daļas vērtība nav naturāls skaitlis. Tātad komanda–uzvarētāja nevar būt ieguvusi 92 punktus.

Pārbaudīsim, vai komanda–zaudētāja varēja iegūt 92 punktus. Tad $2an+3a+n=92$ un $n=\dfrac{92-3a}{2a+1}$. Ja $a = 5$, tad $n = 7$, vai, ja $a = 8$, tad $n = 4$, tātad, komanda–zaudētāja varēja iegūt 92 punktus.

Tā kā komanda-uzvarētāja ieguva par 3 punktiem nekā komandu-zaudētāja, tad otra komanda (uzvarētāja) ieguva 95 punktus.

9.5. a) Atbilde: 8, skat., piemēram, 2. zīm.

b) Atbilde: 9, skat., piemēram, 3. zīm.



2. zīm. 3. zīm. 4. zīm.

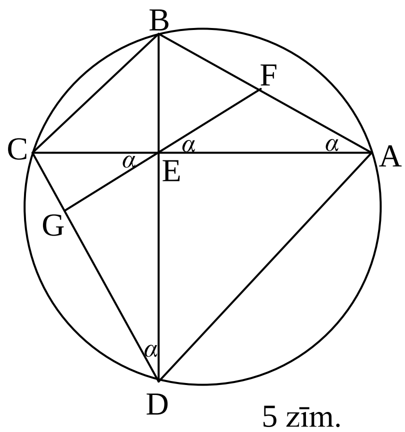
Pierādīsim, ka nav iespējams izvietot 10 figūriņas. Izkrāsosim pārklājamo figūru kā parādīts 4. zīm. Tad, lai arī kā tiktu ievietota figūriņa, tā pārklās tieši vienu iekrāsoto rūtiņu. Tātad, ja varētu izgriezt 10 figūriņas, tās pārklātu 10 iekrāsotās rūtiņas, bet ir tikai 9 – pretruna.

10.1. Pārveidosim doto vienādojumu:

$$\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a^2+b^2}=\frac{ab-2(a+b)}{2ab} \Rightarrow (a^2+b^2)(ab-2(a+b))=2ab.$$

Lai vienādojumam būtu atrisinājums naturālos skaitļos, nepieciešams, lai $ab-2(a+b)\geq 1$. Tad $a^2+b^2\leq 2ab$ un $(a-b)^2\leq 0$. Tas iespējams tikai tad, ja $a=b$. Tādā gadījumā $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{2a^2}=\dfrac{1}{2}$, tāpēc $a\geq 5$. Bet tādā gadījumā $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{2a^2}\leq\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{50}=\dfrac{21}{50}<\dfrac{1}{2}$, tāpēc vienādojumam atrisinājuma naturālos skaitļos nav.

10.2. Apzīmēsim $\angle BAE=\alpha$, tad arī $\angle BDC=\alpha$ (kā ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu loku BC) (skat. 5. zīm.). Taisnleņķa trijstūra ABE hipotenūzas viduspunkts vienlaikus ir šim trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs. Tāpēc ΔAFE ir vienādsānu un $\angle AEF=\alpha$. $\angle CEG=\angle AEF=\alpha$ kā krustleņķi. No taisnleņķa trīsstūra DEC seko, ka $\angle DCE=90°-\alpha$. Savukārt trijstūrī CGE $\angle CGE=180°-\angle GCE-\alpha=180°-(90°-\alpha)-\alpha=90°$, k.b.j.



5 zīm.

10.3. $f(x)=(x^2-x)(x^2-x-110)=\left((x^2-x-55)+55\right)\left((x^2-x-55)-55\right)=\left(x^2-x-55\right)^2-3025.$

Visām x vērtībām $\left(x^2-x-55\right)^2\ge 0$, tātad $f(x)\ge -3025$. Tā kā kvadrātvienādojuma $x^2-x-55=0$ diskriminats $D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-55)=221>0$, tad eksistē tāda reāla x vērtība, ka $\left(x^2-x-55\right)^2=x^2-x-55=0$, tātad mazākā iespējamā $f(x)$ vērtība ir -3025.

10.4. Apskatīsim Fibonači virknes locekļu atlikumus, dalot ar 3. Tad iegūstam virkni

$\underline{1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0}, 1, 1, 2, ...$

Atlikumu virkne ir periodiska (periods ir pasvītrots). Tātad virknē ir bezgalīgi daudz skaitļu, kas ir dod atlikumu 2, dalot ar 3.

Taču naturāla skaitļa kvadrāts, dalot ar 3, var dot atlikumu tikai 0 vai 1:

ja $n=3k\Rightarrow n^2=9k^2=3\cdot 3k^2+0$

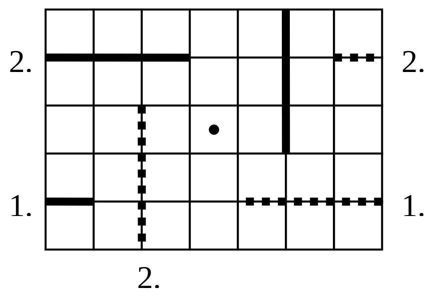
ja $n=3k+1\Rightarrow n^2=9k^2+6k+1=3\cdot(3k^2+2k)+1$

ja $n=3k+2\Rightarrow n^2=9k^2+12k+4=3\cdot(3k^2+4k+1)+1$

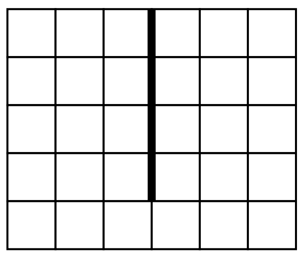
Tātad Fibonači virknē ir bezgalīgi daudz skaitļu (tie, kas dod atlikumu 2, dalot ar 3), kas nav naturāla skaitļa kvadrāts.

10.5. Šķirosim divus gadījumus:

1) Skaitļi n un m abi ir nepāra. Šajā gadījumā 2. spēlētājs vienmēr var veikt griezumu, kas ir simetrisks 1. spēlētāja pēdējam griezumam attiecībā pret lapas centru (skat., piem., 6. zīm.). Tāpēc šajā gadījumā uzvar 2. spēlētājs.



6. zīm.



7. zīm.

2) Vismaz viens no skaitļiem n un m ir pāra. Tad 1. spēlētājs sākumā veic visgarāko iespējamo griezumu pa vidu malā ar pāra garumu (skat. 7. zīm.). Tālāk 1. spēlētājs var pielietot **1)** punkta 2. spēlētāja simetrisko stratēģiju. Tāpēc šajā gadījumā uzvar 1. spēlētājs.

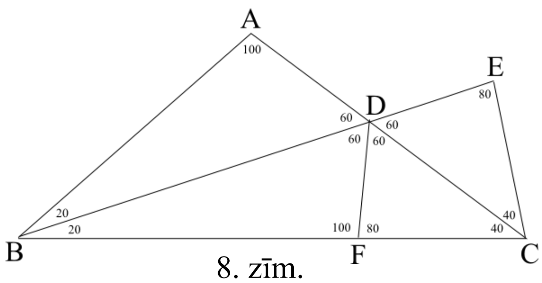
11.1. Pieņemsim pretējo, ka šāda n vērtība tomēr eksistē. Tad $n^2+4n+16=36k$ jeb $(n+2)^2+12=36k$. Tā kā vienādības labā puse dalās ar 12 un 12 dalās ar 12, tad arī $(n+2)^2$ jādalās ar 12. Lai $(n+2)^2$ dalītos ar 12, skaitlim (n + 2) ir jādalās ar 6. Savukārt, ja (n + 2) dalās ar 6, tad $(n+2)^2$ dalās ar 36. Tātad iegūstam sakarību $36m+12=36k$, kur k un m ir naturāli skaitļi. Taču tādas k un m vērtības neeksistē, tātad nav tādu n vērtību, ka $n^2+4n+16$ dalās ar 36.

11.2. Tā kā ABC ir vienādsānu trijstūris, tad $\angle ACB=\angle ABC=40°$ (skat. 8. zīm.). Tā kā BD ir bisektrise, tad $\angle ABD=20°$ un $\angle ADB=60°$.

Atliksim punktu F, kas simetrisks punktam A pret taisni BD. Tad trijstūri ABD un FBD ir vienādi (simetriski pret taisni BD), tāpēc to atbilstošie elementi ir vienādi:

$AD=DF$, $\angle BDA=\angle BDF=60°$,

$\angle BAD=\angle BFD=100°$.



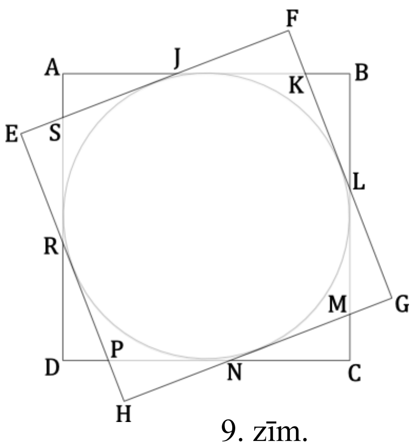
8. zīm.

$\angle FDC=180°-\angle ADB-\angle BDF=60°$ un $\angle DFC=180°-\angle BFD=80°$.

Konstruēsim trijstūrim DFC simetrisku trijstūri DEC pret taisni DC. Šo trijstūri atbilstošie elementi ir vienādi: $\angle CDE = \angle CDF = 60°$, $\angle DEC = \angle DFC = 80°$, $\angle ECD = \angle FCD = 40°$, $DE=DF$. Tā kā $\angle BDE = \angle BDF + \angle FDC + \angle CDE = 180°$, tad punkti B, D un E atrodas uz vienas taisnes. Tā kā $\angle BEC = \angle BCE = 80°$, tad trijstūris BEC ir vienādsānu un $BE=BC$. Bet $BC=BE=BD+DE=BD+DF=BD+AD$, k.b.j.

11.3. Apzīmēsim taisnstūra paralēlskaldņa šķautņu garumus ar a, b, un c (tās ir arī dotā vienādojuma saknes). Tad doto vienādojumu var pārrakstīt formā $(x-a)(x-b)(x-c)=0$. Atverot iekavas, iegūstam $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - x^2(a+b+c) + x(ab+ac+bc) - abc$.
Ievērosim, ka dotajā vienādojumā koeficients pie x ir vienāds ar pusi no taisnstūra paralēlskaldņa pilnas virsmas laukuma, tātad pilnas virsmas laukums ir $2\cdot 623 = 1246$ cm^2. Savukārt taisnstūra paralēlskaldņa tilpums ir vienāds ar abc, kas ir vienādojuma brīvais loceklis ar pretējo zīmi, tātad paralēlskaldņa tilpums ir 2860 cm^2.

11.4. a) Atbilde: jā, noteikti. Tā kā abiem kvadrātiem ir centrs sakrīt, tiem abiem ir kopīgs tajos ievilktais riņķis, kura rādiusa garums ir 20 cm (skat. 9. zīm.). Riņķa laukums ir $400\pi\ \text{cm}^2 > 400\cdot 3{,}14\,\text{cm}^2 = \,=1256\,\text{cm}^2 > 1250\,\text{cm}^2$.



9. zīm.

b) Atbilde: jā, noteikti. Ja kvadrāti nesakrīt, tad ārpus kopīgās daļas veidojas astoņi vienādi taisnleņķa trijstūri AJS, JFK, BKL, LMG, CMN, PHN, DPR un ERS. Kvadrātu kopīgā daļa būs mazākā iespējamā, ja šo trijstūru laukums būs lielākais iespējamais. Apzīmējot $AJ=JF=x$ un $FK=KB=y$, iegūstam, ka

$$AB = 40 = x + y + \sqrt{x^2+y^2} \quad\Rightarrow\quad 40-(x+y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad\Rightarrow$$

$$1600 - 80(x+y) + x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 \;\Rightarrow\; y = 40\cdot\frac{20-x}{40-x}.$$

Tātad, nepieciešams atrast tādu x vērtību, lai $xy = 40x\cdot\frac{20-x}{40-x}$ vērtība būtu maksimāla. Ne x, ne y vērtība nevar pārsniegt pusi no kvadrāta malas garuma, t.i., 20 cm.

$$40x\frac{20-x}{40-x} = 40\left(x+20+\frac{800}{x-40}\right) = 40\left(60+x-40+\frac{800}{x-40}\right) = 2400 + 40\left(x-40+\frac{800}{x-40}\right).$$

Apzīmējot $x-40=-p$ ($p>0$), no sakarībām starp aritmētisko un ģeometrisko vidējo iegūst

$$(-p) + \frac{a}{(-p)} \geq \sqrt{(-p)\frac{a}{(-p)}} = \sqrt{a}\ .$$

Izmantojot šo sakarību, iegūstam, ka maksimālā xy vērtība ir tad, ja $40-x=\sqrt{800}$ jeb $x = 40-20\sqrt{2}$. Tātad mazākais iespējamais kvadrātu kopīgās daļas laukums ir

$$1600 - 2xy = 1600 - 2(2400 - 80\cdot 20\sqrt{2}) = 3200\sqrt{2} - 3200 = 3200(\sqrt{2}-1) > 3200\cdot(1{,}41-1) =$$
$$= 3200\cdot 0{,}41 = 1312 > 1300\,(\text{cm}^2).$$

11.5. a) Ar matemātisko indukciju pamatosim, ka ir vismaz divas pilsētas, no kurām no katras iziet tieši viens ceļš.
Ja $n=2$, tad apgalvojums ir acīmredzami patiess (starp divām pilsētām var būt uzbūvēts tikai viens ceļš, kas savieno šīs pilsētas).
Pieņemsim, ka vajadzīgais ir pamatots pie $n<k$ pilsētām un pamatosim to arī k pilsētu gadījumā, $k\geq 3$. Patvaļīgi izvēlēsimies vienu ceļu, pieņemsim, ka tas savieno pilsētas A un B. „Nodzēsīsim" (pieņemsim, ka tas vairs nav izbraucams) ceļu AB, un visas pilsētas sadalīsim divās grupās – grupā V_1 (pilsētas, uz kurām iespējams nokļūt no pilsētas A, ieskaitot pašu A), un grupā V_2

(pilsētas, uz kurām iespējams nokļūt no B, ieskaitot pašu B). Ievērosim, ka katra pilsēta ietilpst tieši vienā no grupām: ja būtu tāda pilsēta C, kurā iespējams nokļūt gan no A, gan B, tad sākotnēji valstī Alfa no pilsētas A uz B varētu nokļūt vairāk nekā vienā veidā (uz B no A varētu nokļūt gan pa ceļu AB, gan pa ceļiem, kas savieno A ar C un C ar B) – pretruna. Vismaz vienā no grupām (pieņemsim, ka tā ir V_1) ir vismaz divas pilsētas; tas nozīmē, ka, saskaņā ar induktīvo hipotēzi, tajā ir vismaz divas pilsētas, no kurām no katras iziet tieši viens ceļš. Ja neviena no šīm pilsētām nav A, tad vajadzīgais ir pamatots (arī sākotnēji no katras šīm pilsētām iziet tikai viens ceļš). Apskatām gadījumu, kad viena no šīm pilsētām ir A (otru pilsētu apzīmēsim ar X). Ir divas iespējas:

- Grupā V_2 ietilpst tikai pilsēta B. Tad sākotnēji no pilsētām X un B no katras izgāja tieši viens ceļš.
- Grupā V_2 ietilpst vismaz divas pilsētas. Tad, saskaņā ar induktīvo hipotēzi, grupā V_2 var atrast divas pilsētas, no kurām no katras iziet tieši viens ceļš. Viena no šīm pilsētām, apzīmēsim to ar Y, nav B. Tad sākotnēji no pilsētām X un Y no katras izgāja tieši viens ceļš.

Līdz ar to ir pamatota induktīvā pāreja un apgalvojums ir pierādīts.

b) Ar matemātisko indukciju parādīsim, ka katrai no pilsētām var piešķirt vērtību -1 vai 1 tā, lai jebkuru divu pilsētu, kuras ir savienotas ar ceļu, vērtības būtu pretējas. Ja $n = 2$, tad apgalvojums acīmredzami ir patiess. Pieņemsim, ka vajadzīgais ir pierādīts, ja $n = k$ un pamatosim, ka tas ir patiess arī, ja $n = k + 1$. Izvēlamies jebkuru pilsētu A, no kuras iziet tieši viens ceļš (pieņemsim, ka šis ceļš iet uz pilsētu B). Aplūkosim visu pilsētu (neskaitot A) un visu ceļu (neskaitot ceļu AB) veidoto sistēmu. Saskaņā ar induktīvo hipotēzi, šīm k pilsētām var piešķirt vērtības 1 un -1 vajadzīgajā veidā. Tad pilsētai A piešķir vērtību $-v$, kur v ir pilsētas B vērtība. Induktīvā pāreja izdarīta.

Ja pilsētām ir piešķirtas vērtības aprakstītajā veidā, tad apzīmēsim ar m to pilsētu skaitu, kurām vērtība ir 1, bet ar l – to pilsētu skaitu, kurām vērtība ir -1. Ja $m < l$, tad visām pilsētām, kurām vērtība ir 1, piekārto pāra numurus; ja $l \le m$, tad pāra numurus piekārto pilsētām, kuru vērtība ir -1. Pārējām pilsētām atlikušos numurus piekārto patvaļīgi.

Tā kā katrām divām ar ceļu savienotām pilsētām ir pretējas vērtības, tad no jebkurām divām ar ceļu savienotām pilsētām vismaz vienai ir piekārtots pāra numurs. Taču tad šo pilsētu numuru reizinājums ir pāra skaitlis.

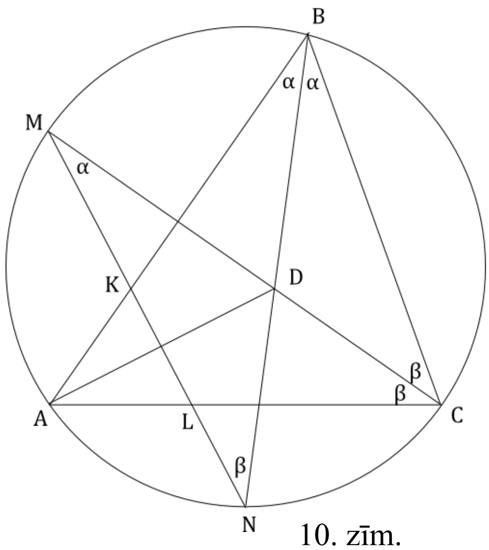
12.1. Apzīmēsim NM krustpunktus ar malām AB un AC attiecīgi ar K un L (skat. 10. zīm.).

Tā kā N un M ir attiecīgo loku viduspunkti, tad leņķi, kas balstās uz vienādiem lokiem, ir vienādi:

$\angle ABN = \angle CBN = \angle CMN = \alpha$ un

$\angle ACM = \angle BCM = \angle BNM = \beta$.

Trijstūra BKN virsotnes K ārējais leņķis ir $\angle AKL = \angle KBN + \angle KNB = \alpha + \beta$, bet trijstūra CLN virsotnes L ārējais leņķis $\angle ALK = \angle CML + \angle LCM = \alpha + \beta$. Tātad trijstūrī AKL divi leņķi ir vienādi, tāpēc trijstūris AKL ir vienādsānu. Pēc konstrukcijas AD ir trijstūru ABC un AKL bisektrise (D ir bisektrišu CM un BN krustpunkts). Bet vienādsānu trijstūra bisektrise, kas vilkta pret pamatu, vienlaikus ir arī augstums. Tātad $AD \perp KL$ jeb $AD \perp MN$, k.b.j.



10. zīm.

12.2. Sareizinot abus vienādojumus, iegūstam $\sin x \sin y + \sin x \cos x + \cos y \sin y + \cos y \cos x = \frac{9}{4}$.

Pārveidojot iegūtā vienādojuma kreiso pusi iegūstam $\cos(x-y) + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2y = \frac{9}{4}$.

Acīmredzami, ka pēdējā vienādojuma kreisā puse nepārsniedz $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$, tāpēc šim vienādojumam un līdz ar to arī sākotnējai sistēmai atrisinājuma nav.

12.3. Ievērosim, ka nevienam veselam $n \geq 0$ nevar būt, ka $f(n) = 0$ – pretējā gadījumā no vienādības $0 = f(n)\cdot\big(f(n+1)-2\big) = 4n^2 - 1$ sekotu, ka $4n^2 = 1$, taču veseliem n šāda vienādība nevar izpildīties.

Tad doto sakarību drīkstam pārveidot formā

$$f(n+1) = 2 + \frac{4n^2-1}{f(n)} \qquad (1)$$

Ievietojot $n = 0$, iegūstam vienādību $f(1) = 2 - \frac{1}{f(0)}$. Tā kā gan $f(0)$, gan $f(1)$ ir veseli skaitļi, tad $f(0)$ var būt vai nu 1, vai -1, citu iespēju nav.

Apskatīsim abos gadījumus.

1) Ja $f(0) = -1$, tad iegūstam $f(1) = 2 - \frac{1}{-1} = 3$. Izmantojot (1), varam pakāpeniski aprēķināt

$$f(2) = 2 + \frac{4\cdot 1 - 1}{3} = 2 + 1 = 3; \qquad f(3) = 2 + \frac{4\cdot 4 - 1}{3} = 2 + 5 = 7;$$

$$f(4) = 2 + \frac{4\cdot 9 - 1}{7} = 2 + 5 = 7; \qquad f(5) = 2 + \frac{4\cdot 16 - 1}{7} = 2 + 9 = 11;$$

$$f(6) = 2 + \frac{4\cdot 25 - 1}{11} = 2 + 9 = 11; \qquad f(7) = 2 + \frac{4\cdot 36 - 1}{11} = 2 + 13 = 15.$$

Rodas hipotēze, ka šajā gadījumā

$$f(n) = \begin{cases} 2n-1, & n = 2m \\ 2n+1, & n = 2m+1 \end{cases} \quad \text{jeb} \quad f(n) = 2n + (-1)^{n+1}.$$

Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka patiešām visiem naturāliem n $f(n) = 2n + (-1)^{n+1}$.

Indukcijas bāze jau ir pamatota.

Pieņemsim, ka $f(k) = 2k + (-1)^{k+1}$. Tādā gadījumā, atbilstoši vienādībai (1),

$$f(k+1) = 2 + \frac{4k^2-1}{f(k)} = 2 + \frac{(2k+(-1)^{k+1})(2k-(-1)^{k+1})}{2k+(-1)^{k+1}} = 2 + 2k - (-1)^{k+1} = 2(k+1) + (-1)^{(k+1)+1}$$

Induktīvā pāreja izdarīta.

2) Ja $f(0) = 1$, tad iegūstam $f(1) = 2 - \frac{1}{1} = 1$. Izmantojot (1), varam pakāpeniski aprēķināt

$$f(2) = 2 + \frac{4\cdot 1 - 1}{1} = 2 + 3 = 5; \qquad f(3) = 2 + \frac{4\cdot 4 - 1}{5} = 2 + 3 = 5;$$

$$f(4) = 2 + \frac{4\cdot 9 - 1}{5} = 2 + 7 = 9; \qquad f(5) = 2 + \frac{4\cdot 16 - 1}{9} = 2 + 7 = 9;$$

$$f(6) = 2 + \frac{4\cdot 25 - 1}{9} = 2 + 11 = 13; \qquad f(7) = 2 + \frac{4\cdot 36 - 1}{13} = 2 + 11 = 13.$$

Rodas hipotēze, ka šajā gadījumā

$$f(n) = \begin{cases} 2n+1, & n = 2m \\ 2n-1, & n = 2m+1 \end{cases} \quad \text{jeb} \quad f(n) = 2n + (-1)^{n}.$$

Līdzīgi kā iepriekšējā gadījumā, ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka patiešām visiem naturāliem n $f(n)=2n+(-1)^n$.

Indukcijas bāze jau ir pamatota.

Pieņemsim, ka $f(k)=2k+(-1)^k$. Tādā gadījumā, atbilstoši vienādībai (1),

$$f(k+1)=2+\frac{4k^2-1}{f(k)}=2+\frac{(2k+(-1)^k)(2k-(-1)^k)}{2k+(-1)^k}=2+2k-(-1)^k=2(k+1)+(-1)^{k+1}$$

Induktīvā pāreja izdarīta.

Tātad vienīgās funkcijas, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir $f(n)=2n+(-1)^{n+1}$ un $f(n)=2n+(-1)^n$.

12.4. Pārveidosim doto vienādību formā $d_3^2+d_4^2=\left(\dfrac{n}{d_3d_4}\right)^2$. Tā kā $\dfrac{n}{d_3d_4}$ ir naturāls skaitlis, tas arī ir skaitļa n dalītājs. Aplūkojot vienādojumu $x^2+y^2=z^2$ $x^2+y^2=z^2$ pēc moduļa 3, iegūstam, ka viens no skaitļiem x, y, z dalās ar 3 (naturāla skaitļa kvadrāts pēc moduļa 3 var būt kongruents tikai ar 0 vai 1). Aplūkojot vienādojumu $x^2+y^2=z^2$ pēc moduļa 8, redzam, ka viens no skaitļiem x, y, z dalās ar 4 (naturāla skaitļa kvadrāts pēc moduļa 8 var būt kongruents tikai ar 0, 1 vai 4).

Tātad skaitlim n mazākie dalītāji ir 1, 2, 3 un 4, t.i., $d_1=1$, $d_2=2$, $d_3=3$, $d_4=4$ un $n^2=d_3{}^2d_4{}^2(d_3^2+d_4^2)=3^2\cdot4^2(3^2+4^2)=3^2\cdot4^2\cdot5^2=(3\cdot4\cdot5)^2=60^2 \Rightarrow n=60$.

12.5. a) Atbilde: nevar.

Aizstājam burtu a ar ciparu 1, burtu b – ar ciparu 2, burtu c – ar ciparu 3. Tātad sākotnēji uz tāfeles uzrakstītā virkne atbilst skaitlim 1221 un jāiegūst skaitli 121. Ievērosim, ka atļautās darbības atbilst šādām darbībām ar skaitļiem:

a) uz tāfeles uzrakstītajā skaitlī var patvaļīgi mainīt ciparu kārtību;
b) ja skaitļa pēdējie divi cipari ir 12, tad tos var nodzēst;
c) ciparus 21 var aizstāt ar 112233;
d) ciparus 223 var aizstāt ar 1;
e) drīkst izsvītrot trīs vienādus pēc kārtas uzrakstītus ciparus.

Ievērosim, ka uz tāfeles uzrakstītā skaitļa ciparu summa, veicot šos gājienus,

a) nemainās;
b) samazinās par 3;
c) palielinās par 9;
d) samazinās par 6;
e) samazinās par 3 (ja nodzēsti trīs vieninieki), 6 (ja nodzēsti trīs divnieki) vai 9 (ja nodzēsti trīs trijnieki).

Sākotnēji uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 1221, kurš dalās ar 3 un kura ciparu summa dalās ar 3. Veicot aprakstītos gājienus, iegūtā skaitļa ciparu summa vienmēr dalīsies ar trīs, kas nozīmē, ka gājienu rezultātā var iegūt tikai skaitļus, kuri dalās ar 3. Taču skaitlis 121 nedalās ar 3, tātad ar aprakstītajiem gājieniem to nevar iegūt no skaitļa 1221. Tātad arī virkni *aba* nevar iegūt no virknes *abba* ar aprakstīto gājienu palīdzību.

b) Atbilde: var, piemēram, *aabbcabaab* → *aaaaabbbbc* → *aabbbbc* → *aabba* → *abaab* → *aba*.